

第 3 次作业

提交日期：5 月 10 日

- 给定一个企业期末产生的自由现金流为常数 C ，只有管理层知道 C 的大小，外部投资人无法核实。管理层知晓企业现金流 C 之后，首先选择外部投资人无法观察到的在职消费 P ，剩余现金流 $V = C - P$ 是企业通过财务报表等途径让外部投资人观察到的待分配现金流，也代表了企业的市场价值。注意在职消费 P 不能超过 C 。管理层可以从 V 中再获取一部分现金流报酬 V_I ，剩余部分 $V - V_I$ 为企业外部投资人所得到的现金流。管理层的效用与其所获得的现金流份额 V_I 以及在职消费 P 有关，效用函数为： $U(V_I, P) = V_I + 2\lambda\sqrt{P}$ ，其中 $\lambda > 0$ 为一个效用参数，取值满足 $\lambda < \sqrt{C}$ 。
 - 首先考虑完全权益融资的情形。管理层所持有的内部股份比例记为 $\alpha \in [0,1]$ ，外部股份比例为 $1 - \alpha$ 。持股比例决定了期末所得待分配现金流的比例。给定 α ，写出管理层的效用最大化问题并求解。注意， P 的最优解需要满足小于等于 C 的限制。请讨论 α 的变动如何影响管理层对 P 的选择，以及如何影响企业市场价值。让企业市场价值最大化的 α^* 是多少？
 - 在 a 的基础上，进一步考虑管理层的外部股权融资问题。请计算给定 α 时，管理层最优在职消费选择下所获得的效用 $\hat{U}(\alpha)$ ，并求解效用最大化对应的 α^{**} 。提示：先将 a 中 P 的最优解写为 α 的函数 $\hat{P}(\alpha)$ ，再分析 $\hat{U}(\alpha)$ 的性质。
 - 现在考虑债务融资的情形。经理人持股比例为 $\alpha \in [0,1]$ ；企业债务偿付值为 $D > 0$ ，满足 $D \leq V = C - P$ ，否则企业债务违约；剩余现金流分配给股东。等价的，给定 D ，在职消费 P 的取值不能超过 $C - D$ 。写出此时的经理人最优化问题并求解。讨论此时最优的 P 和企业市场价值 V 的大小，并讨论债务融资 D 可能起到做的作用，并计算最大化企业市场价值的债务融资额 D^* 。
 - 在 c 的基础上计算管理层的效用 $\tilde{U}(D)$ ，并求解效用最大化时的 D^{**} 。
 - 【附加题，总计 5 分】若创始人初始财富为 W ，但企业所需的投资 $I > W$ 且 $I < C$ ，故创始人需要寻求外部融资。假设外部权益投资者与债权投资者所需要的收益率均为 0，即投入¥1 所需的回报为¥1。创始人在获得外部融资后留任管理层。请分析创始人不同的外部融资策略 α 与 D 对其留任后在职消费的影响，进而确定对其效用的影响。若要最大化企业市场价值，则最优的 α^0 与 D^0 是多少？若创始人最大化其效用，则最优的 α^1 与 D^1 是多少？
- 本题考虑债务积压问题。假设一个企业在 $t = 2$ 时可以投资 $I > 0$ ，随后在 $t = 3$ 时取得一个不确定的现金流 X ，同时需要偿付面值为 D 的债务。然而，投资者在 $t =$

1时即可知晓未来现金流 X 的大小，因此 $t = 2$ 时的投资决策依赖于 X 与 $I + D$ 大小的比较：若 $X < I + D$ ，则股东回报为 0，故不会选择投资；若 $X \geq I + D$ ，则股东回报非负，故会选择投资。此外，若 $t = 2$ 时不投资，则企业在 $t = 3$ 时现金流为 0，债权人回报亦为 0。注意，模型中折现率默认假设为 0，故不同期的现金流可以直接比较。假设 X 服从 $[0, \infty)$ 的指数分布，密度函数为 $\lambda e^{-\lambda x}$ ， $\lambda > 0$ 。

- a. 请计算 X 的期望，并写出计算步骤。你可能需要回顾概率论和微积分相关内容。
 - b. 请计算投资项目在 $t = 0$ 时的期望价值（净现值） V ，并计算 V 关于债务面值 D 的单调性。注意，由 X 的随机性，这个价值可以表示为一个积分，你需要确定积分的被积函数、上下限等。
 - c. 请计算债权人在 $t = 0$ 时其债权的期望价值 V_D ，并确定 V_D 关于面值 D 的单调性。是否存在最大化 V_D 的债务面值 D^* ？若存在，请求解 D^* 。
 - d. 请计算股东在 $t = 0$ 时的权益价值 V_E ，即 $V_E = V - V_D$ 。若股东希望最大化 V_E ，则应当选择的债务融资面值 D^{**} 等于多少？
3. 假设股东 A 持有公司 F 和 G 的股份分别为 20%与 30%，而股东 B 持有公司 F 和 G 的股份分别为 30%和 20%，同时 F 持有 G 的股份为 50%， G 持有 F 的股份为 50%。
- a. 请画出 A, B, F, G 的持股关系图。
 - b. F 持股 G ，而同时 G 又持股 F ，因此 F, G 之间存在循环持股。此时 A 对 G 的最终持股比例为对 G 的直接持股与通过 F 对 G 间接持股之和；其他最终持股类似。令 ϕ_{AF} 与 ϕ_{AG} 为 A 对 F, G 的最终持股比例，请写出 ϕ_{AF} 与 ϕ_{AG} 所满足的 2 元线性方程组，并求解其数值。
 - c. 请求解 ϕ_{BF}, ϕ_{BG} 的数值。
 - d. 若 F 和 G 自有非股权资产分别为 100 与 200 亿，请确定 F, G 包含股权资产在内各自的总价值。
 - e. 请计算 A, B 各自对 F, G 持股的总价值。
 - f. 若改变设定，假设 F 持有 G 的股份增加至 90%， G 持有 F 的股份增加至 90%，而 A, B 对 F, G 的持股份额等比例缩小，且 F 和 G 自有非股权资产价值不变。请重复 a-e 的计算，并说明循环持股份额上升对公司总价值和投资者持股总价值的影响。
 - g. 若 F, G 相互持股比例趋近于 100%，请说明此时公司总价值和投资者持股总价值会呈现什么趋势？你认为应该禁止公司间循环持股吗？
4. 给定你有 12 天时间完成这份作业，请根据你个人实际情况，确定在这 12 天之内为完成这次作业所要在不同时间、不同状态（如各种随机状态）下进行的选择，绘制一棵决策树。在决策树基础上，请说明你的最优决策路径。