武汉大学本科金融学专业 2020 春季学期公司金融

第 2 次作业参考答案

考虑 n 个风险资产，随机收益率记为列向量 $\boldsymbol{R}=(R_1,\ldots,R_n)^\top$，期望收益率为列向量 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)^\top$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}=\left(\sigma_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$，$\sigma_{ii}$ 表示第 i 个资产收益率的方差。注意 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称矩阵，且我们总假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵，故也是可逆矩阵。

a. 现在考虑给定资产组合期望收益 $\mu_w=\mu_e$ 时，资产组合的方差最小化问题。为推导简便起见，我们把目标函数选为 $\frac{1}{2}\sigma_w^2$（最小化该目标函数与最小化 σ_w^2 等价），权重向量 $\boldsymbol{w}$ 需要满足两个约束条件：$\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1$ 和 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$。因此我们把最小化问题写为：

$$\min_{\boldsymbol{w}}\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1\text{ 且 }\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e.$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 为选择变量。上述约束最小化问题对应的 Lagrangian 函数（复习或学习高数有关内容）可写为

$$L=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}-\lambda(\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n-1)-\delta(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}-\mu_e),$$

其中 λ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1$ 对应的乘子，δ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$ 对应的乘子。有了 Lagrangian 函数之后，求解约束最小化问题就转化为求解 Lagrangian 函数的极值问题。为此，需要推导 L 关于 $\boldsymbol{w}$ 的导数。我们使用下列向量记号：

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{w}}=\left(\frac{\partial F}{\partial w_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial w_n}\right)^\top,$$

其中 F 为 n 个变量 $\boldsymbol{w}^\top=(w_1,\ldots,w_n)$ 的函数。

i. 当 $F=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$ 时，请验证 $\partial F/\partial\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$。

注：你可以选择使用“暴力”解法，把 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$ 写为求和形式 $\sum_i\sum_j w_i\sigma_{ij}w_j$，然后计算其关于 $w_k,k=1,\ldots,n$ 的偏导数。另外一种更简明的办法是定义 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)^\top$ 为一个列向量，并且每个元素 v_i 都是 $\boldsymbol{w}$ 的函数 $v_i(\boldsymbol{w})$。如此一来 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{v}=w_1v_1(\boldsymbol{w})+\cdots w_nv_n(\boldsymbol{w})$，你只需要验证 (i)

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}}{\partial w_k}=w_1\frac{\partial v_1}{\partial w_k}+\cdots w_n\frac{\partial v_n}{\partial w_k}+v_i$$

以及 (ii) 上式等于 $2v_i$ 即可。

解：直接计算可知。

ii. 当 $F = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}$ 而 $\boldsymbol{x}$ 为一个常数列向量时，请验证 $\partial F / \partial \boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}$。

解：直接计算可知。

iii. 利用上述结论，验证 Lagrangian 函数的导数等于：

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \boldsymbol{\Sigma w} - \lambda \mathbf{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu}.$$

解：直接计算可知。

b. Lagrangian 函数的极值条件为 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \mathbf{0}_n$，其中 $\mathbf{0}_n$ 表示一个 $n \times 1$ 的零向量。与最小化问题中的两个约束条件联立，可以得到如下 $n+2$ 个联立方程组：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma w} - \lambda \mathbf{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_n & (1) \\ \boldsymbol{w}^\top \mathbf{1}_n = 1 & (2) \\ \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e & (3) \end{cases}$$

而其中的未知量为权重向量 $\boldsymbol{w}$（共 n 个未知量）以及两个乘子 λ 和 δ，共计 $n+2$ 个未知量。求解该方程，可以得到最优权重向量 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{e}}$。步骤如下：

i. 先将上式左乘 $\mathbf{1}_n^\top$，再将上式左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$，说明你将得到如下形式的线性方程组：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_e \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

并给出 A, B, C 的表达式，并说明 $A, C > 0$。注：$A, C > 0$ 需要用到 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵这一事实（正定矩阵的逆矩阵是不是正定矩阵？）。

解：方程左乘 $\mathbf{1}_n^\top$ 得到（常数与矩阵乘积可交换位置）

$$\lambda \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{w} = 1$$

故 $A = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n$，$B = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$。左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$ 可得

$$\lambda \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{w} = \mu_e$$

上两式整理可得 (4)，其中

$$A = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \qquad B = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \qquad C = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

由于 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 也是正定矩阵，由此知 $A, C > 0$。

ii. 求解二元线性方程组 (4)，说明 $\lambda_{\mathrm{e}}, \delta_e$ 是 μ_e 的线性函数。注：你可以使用 Cramer 法则求 (4) 中系数矩阵的逆。

解：对 (4) 的系数矩阵求逆可得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{AC - B^2} \begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

故

$$\lambda_e = \frac{C - B\mu_e}{AC - B^2} \qquad \delta_e = \frac{A\mu_e - B}{AC - B^2}$$

iii. 最优权重可以写为 $\boldsymbol{w_e} = \lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$。据此说明

$$\sigma_e^2=\boldsymbol{w}_{\mathbf{e}}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}_{\mathbf{e}}=A\lambda_e^2+2B\lambda_e\delta_e+C\delta_e^2,$$

其中 A,B,C 为 (4) 式对应的表达式。进一步说明，给定期望收益率 μ_e 所对应的最小方差组合 $\boldsymbol{w}_{\mathbf{e}}^\top\boldsymbol{R}$ 的方差 σ_e^2 是 μ_e 的二次函数：

$$\sigma_e^2=a\mu_e^2+b\mu_e+c,\tag{5}$$

二次曲线 (μ_e,σ_e) 就是 n 个资产组合可行集的边界。

解：由 $\boldsymbol{w_e}=\lambda_e\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n+\delta_e\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ 可知

$$\begin{aligned}\sigma_e^2&=\boldsymbol{w}_{\mathbf{e}}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}_{\mathbf{e}}=(\lambda_e\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n+\delta_e\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}(\lambda_e\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n+\delta_e\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})\\&=(\lambda_e\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+\delta_e\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\boldsymbol{\Sigma}(\lambda_e\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n+\delta_e\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})\\&=\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n\lambda_e^2+2\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\lambda_e\delta_e+\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\delta_e^2\\&=A\lambda_e^2+2B\lambda_e\delta_e+C\delta_e^2\end{aligned}$$

将 A,B,C 的表达式代入上式可知

$$\sigma_e^2=\frac{A\mu_e^2-2B\mu_e+C}{AC-B^2}=a\mu_e^2+b\mu_e+c$$

c. 请求出 (5) 式中 a,b,c 关于 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式；并说明且 $a>0$。

解：由上问可知

$$a=\frac{A}{AC-B^2},\qquad b=\frac{-2B}{AC-B^2},\qquad c=\frac{C}{AC-B^2}$$

且$A=\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n\qquad B=\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\qquad C=\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$

因此

$$a=\frac{A}{AC-B^2}=\frac{\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}-(\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}$$

$$b=\frac{-2B}{AC-B^2}=\frac{-2\cdot\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}-(\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}$$

$$c=\frac{C}{AC-B^2}=\frac{\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}-(\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}$$

为说明$a>0$，只需说明$\Delta=AC-B^2>0$。首先注意到

$$\Delta=\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_n+\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

对正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 可以定义 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}$ 如下：考虑 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 的特征值分解

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\mathbf{H}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{H}^\top\qquad\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 对角线上为 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 的 n 个特征值，且 $\lambda_1,\dots,\lambda_n>0$; $\mathbf{H}$ 为正交矩阵，满足 $\mathbf{H}^\top=\mathbf{H}^{-1}$。由于 $\lambda_1,\dots,\lambda_n>0$，故可定义

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix},$$

并进一步定义 $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}=\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{H}^\top$。计算可知

$$\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{\Sigma}^{-1/2}=\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{H}^\top\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{H}^\top=\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{H}^\top=\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}\mathbf{H}^\top=\mathbf{\Sigma}^{-1}.$$

由此，令 $\mathbf{x}=\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{1}_n$，$\mathbf{y}=\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\mu}$，则

$$\Delta=(\mathbf{x}^\top\mathbf{x})(\mathbf{y}^\top\mathbf{y})-(\mathbf{x}^\top\mathbf{y})^2.$$

如此，可用 Cauchy-Schwartz 不等式说明 $\Delta>0$。

d. 请说明有效组合 (μ_e,σ_e) 构成双曲线的一支，并求出其两条渐近线的表达式。

解： 由 (5) 可知

$$\sigma_e^2=a\mu_e^2+b\mu_e+c=a\left(\mu_e+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

上式可改写为

$$\frac{\sigma_e^2}{c-\frac{b^2}{4a}}-\frac{\left(\mu_e+\frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}=1$$

由于$\sigma_e\geq 0$，因此使上式成立的 (μ_e,σ_e) 构成双曲线的一支。

根据双曲线渐近线公式，即$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$的渐近线为$\mathrm{y}=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$

渐近线为

$$\mu_e+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\sigma_e$$

整理得

$$\mu_e=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}\sigma_e-\frac{b}{2a}$$

e. 基于 (5) 式，求出最小方差点 (μ_m,σ_m) 关于 $\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}$ 等参数的表达式。

解： 由上问得

$$\sigma_e^2=a\mu_e^2+b\mu_e+c=a\left(\mu_e+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

当σ_e最小时，$\mu_e=-\frac{b}{2a}$

因此$\mu_m=-\frac{b}{2a}$，$\sigma_m=\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}$

代入

$$a=\frac{A}{AC-B^2}\qquad b=\frac{-2B}{AC-B^2}\qquad c=\frac{C}{AC-B^2}$$
$$A=\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n\qquad B=\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\qquad C=\boldsymbol{\mu}^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

可得

$$\mu_m=\frac{B}{A}=\frac{\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n}\qquad \sigma_m=\sqrt{\frac{1}{A}}=\sqrt{\frac{1}{\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n}}$$

即最小方差点为

$$(\mu_m,\sigma_m)=\left(\frac{\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n},\sqrt{\frac{1}{\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n}}\right)$$

f. 假设无风险资产利率$r_f<\mu_m$。请计算最优风险资产组合（μ_*,σ_*）的表达式。注意最优风险资产组合的确定条件：（μ_*,σ_*）与（$r_f,0$）连线与有效前沿相切。

解：在式$\sigma^2=a\mu^2+b\mu+c$中，对σ求导得

$$2\sigma=2a\mu\frac{d\mu}{d\sigma}+b\frac{d\mu}{d\sigma}=(2a\mu+b)\frac{d\mu}{d\sigma}$$

所以有

$$\frac{d\mu}{d\sigma}=\frac{2\sigma}{2a\mu+b}$$

根据上式，在切点(μ_*,σ_*)，有

$$\frac{\mu_*-r_f}{\sigma_*}=\frac{2\sigma_*}{2a\mu_*+b}$$

上式与${\sigma_*}^2=a{\mu_*}^2+b\mu_*+c$联立可得

$$\mu_*=-\frac{2c+br_f}{b+2ar_f}$$

$$\sigma_*=\sqrt{a{\mu_*}^2+b\mu_*+c}$$

即为最优风险资产组合（μ_*,σ_*）的表达式

g. **解：**在给定μ_e时，如果α不为 0，那么组合的权重向量一定是不等于方差最小权重向量w_e，因此在这种情况下，组合的方差一定会更大。只有在$\alpha=0$的情况下，两者是相等的。

h. **解**：由题目有：

$$\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha}=\frac{\alpha\sigma_k^2+(\alpha-1)\sigma_e^2+(1-2\alpha)cov(R_k,R_*)}{\left(\alpha^2\sigma_k^2+(1-\alpha)^2\sigma_e^2+2\alpha(1-\alpha)cov(R_k,R_*)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial\alpha}=\mu_k-\mu_e$$

所以$\alpha=0$时：

$$\frac{\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha}}=\frac{(\mu_k-\mu_e)\sigma_e}{cov(R_k,R_*)-\sigma_e^2}$$

$$=\frac{(\mu_k-\mu_m)\sigma_m}{cov(R_k,R_m)-\sigma_m^2}$$

又因为

$$\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial\sigma_\alpha}=\frac{\mu_m-r_f}{\sigma_m}$$

所以有：

$$\mu_k\sigma_m^2=cov(R_k,R_*)\left(\mu_m-r_f\right)+r_f\sigma_m^2$$

令

$$\beta_k=\frac{cov(R_k,R_m)}{\sigma_m^2}$$

有：

$$\mu_k=r_f+\beta_k(\mu_m-r_f)$$

因此，CAPM 定价公式得证。