武汉大学本科金融工程专业 2020 春公司金融

第 2 次作业

提交日期：2020/4/23

1. 考虑 n 个风险资产，随机收益率记为列向量 $\boldsymbol{R}=(R_1,\dots,R_n)^\top$，期望收益率为列向量 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_n)^\top$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})_{1\le i,j\le n}$，$\sigma_{ii}$ 表示第 i 个资产收益率的方差。注意 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称矩阵，且我们总假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是<u>正定矩阵</u>。记资产组合权重向量为 $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_n)^\top$，满足
$$\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=w_1+\cdots+w_n=1$$
其中 $\mathbf{1}_n=(1,\dots,1)^\top$ 表示全为 1 的列向量。资产组合收益率为 $R_w=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{R}$。
   a. 现在考虑给定资产组合期望收益 $\mu_w=\mu_e$ 时，资产组合的方差最小化问题。为推导简便起见，我们把目标函数选为 $\frac{1}{2}\sigma_w^2$，权重向量 $\boldsymbol{w}$ 需要满足两个<u>约束条件</u>：$\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1$ 和 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$。因此我们把最小化问题写为：
$$\min_{\boldsymbol{w}}\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1\ 且\ \boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e.$$
   其中 $\boldsymbol{w}$ 为选择变量。上述约束最小化问题对应的 Lagrangian 函数（复习或学习高数有关内容）可写为
$$L=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}-\lambda(\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n-1)-\delta(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}-\mu_*),$$
   其中 λ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1$ 对应的乘子，δ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$ 对应的乘子。我们使用下列向量记号：
$$\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{w}}=\left(\frac{\partial F}{\partial w_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial w_n}\right)^\top,$$
   其中 F 为 $\boldsymbol{w}^\top=(w_1,\dots,w_n)$ 的函数。
      i. 当 $F=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$ 时，请验证 $\partial F/\partial\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$。
      注：可以定义 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_n)^\top$ 为一个列向量，并且每个元素 v_i 都是 $\boldsymbol{w}$ 的函数 $v_i(\boldsymbol{w})$。如此一来 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{v}=w_1v_1(\boldsymbol{w})+\cdots w_nv_n(\boldsymbol{w})$，你只需要验证 (i)
$$\frac{\partial\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}}{\partial w_k}=w_1\frac{\partial v_1}{\partial w_k}+\cdots w_n\frac{\partial v_n}{\partial w_k}+v_i$$
      以及 (ii) 上式等于 $2v_i$ 即可。
      ii. 当 $F=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{x}$ 而 $\boldsymbol{x}$ 为一个常数列向量时，请验证 $\partial F/\partial\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}$。
      iii. 利用上述结论，验证 Lagrangian 函数的导数等于：
$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}-\lambda\mathbf{1}_n-\delta\boldsymbol{\mu}.$$
   b. Lagrangian 函数的极值条件为 $\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{w}}=\mathbf{0}_n$，其中 $\mathbf{0}_n$ 表示一个 $n\times1$ 的零向量。与最小化问题中的两个约束条件联立，可以得到如下 $n+2$ 个联立方程组：
$$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}-\lambda\mathbf{1}_n-\delta\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}_n \tag{1}$$
$$\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1 \tag{2}$$
$$\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e \tag{3}$$
   而其中的未知量为权重向量 $\boldsymbol{w}$（共 n 个未知量）以及两个乘子 λ 和 δ，共计 $n+2$ 个未知量。求解该方程，可以得到有效组合权重向量 $\boldsymbol{w}_e$。步骤如下：

i. 将 (1) 重写为

$$\lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{w},$$

将上式左乘 $\mathbf{1}_n^\top$，再左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$，得到如下形式的线性方程组：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_e \end{bmatrix}, \tag{4}$$

请给出 A, B, C 的表达式，并说明 $A, C > 0$。注：$A, C > 0$ 需要用到 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵这一事实。

ii. 求解二元线性方程组 (4)，说明方程的解 λ_e, δ_e 是 μ_e 的线性函数。注：你可以使用 Cramer 法则求 (4) 中系数矩阵的逆。

iii. 最优权重可以写为 $\boldsymbol{w}_e = \lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$。据此说明

$$\sigma_e^2 = \boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}_e = A\lambda_e^2 + 2B\lambda_e\delta_e + C\delta_e^2,$$

其中 A, B, C 为 (4) 式对应的表达式。进一步说明，给定期望收益率 μ_e 所对应的最小方差组合 $\boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{R}$ 的方差 σ_e^2 是 μ_e 的二次函数：

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c, \tag{5}$$

二次曲线 (μ_e, σ_e) 就是 n 个资产组合可行集的边界。

c. 请求出 (5) 式中 a, b, c 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式；并说明且 $a > 0$。

d. 请说明有效组合 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支，并求出其两条渐近线的表达式。

e. 基于 (5) 式，求出最小方差点 (μ_m, σ_m) 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式。

f. 假设无风险资产利率 $r_f < \mu_m$。请计算最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) 的表达式。注意最优风险资产组合的确定条件：(μ_*, σ_*) 与 $(r_f, 0)$ 连线与有效前沿相切。

g. 将最优资产组合记为 $R_* = \boldsymbol{w}_*^\top \boldsymbol{R}$，其中 $\boldsymbol{w}_*$ 为最优风险资产组合的权重向量。选择任意的风险资产 k，定义新的风险资产组合 $R_\alpha = \alpha R_k + (1-\alpha)R_*$，$\alpha \in \mathbb{R}$ 为权重，并将其期望收益与标准差记为 $(\mu_\alpha, \sigma_\alpha)$。注意，该组合收益率的标准差可写为收益率的函数 $\sigma_\alpha(\mu_\alpha)$。请说明，对于任意目标期望收益率的 $\mu > 0$，$\sigma_e(\mu) \le \sigma_\alpha(\mu)$，其中等号成立当且仅当 $\alpha = 0$，$\sigma_e(\mu)$ 由 (5) 定义。

从几何上看，这一结论说明可行集中任一资产与最优资产组合所形成资产组合收益率期望-标准差连线，位于可行集边界线的右侧，且与可行集边界线相切于最优资产组合点。事实上，将最优资产组合替换为可行集边界上任一点对应的资产组合，上述结论均成立。

h. 假设资本市场中的投资者具有同质预期，则最优资产组合又是市场组合，$R_m = R_*$。由此出发，我们将给出 CAPM 定价公式的另外一种推导方法。首先，若市场的确处于均衡状态，则投资者在考虑上问定义的投资这组合 R_α 时，应当要选择 $\alpha = 0$。注意投资者改变 α 对 R_α 的边际影响可以表示为

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha}.$$

请计算这两个偏导数，并确定它们在 $\alpha = 0$ 时的取值。进一步，计算

$$\left.\frac{\partial \mu_\alpha / \partial \alpha}{\partial \sigma_\alpha / \partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

并注意到这是 $(\mu_\alpha, \sigma_\alpha)$ 连线与 (μ_e, σ_e) 连线切点出的斜率，而该切点为市场组合（最优风险资产）点，由定义可知，(μ_e, σ_e) 在该点出的斜率为 $(\mu_m - r_f)/\sigma_m$。由此，请证明 CAPM 定价公式成立。