武汉大学本科 2019 年秋季学期公司金融

第 2 次作业参考答案

1.

a. $E_t D_{t+n} = (1+g)^n D_t$

b. $P_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_t D_{t+n}}{(1+r)^n} == \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} D_t = \lim_{n\to\infty} (1-(\frac{1+g}{1+r})^n) \frac{1+g}{r-g} D_t = \frac{1+g}{r-g} D_t$

c.

$$R_{t+1} = \frac{(1+r)D_{t+1}}{(1+g)D_t} - 1$$

$$E_t R_{t+1} = \frac{(1+r)E_t D_{t+1}}{(1+g)D_t} - 1 = \mathrm{r}$$

$$var_t R_{t+1} = var_t\left(\frac{(1+r)D_{t+1}}{(1+g)D_t} - 1\right)$$

$$= var_t\left(\frac{(1+r)\big((1+g)D_t + \epsilon_{t+1}\big)}{(1+g)D_t}\right)$$

$$= var_t\left(\frac{(1+r)\epsilon_t}{(1+g)D_t}\right) = \frac{(1+r)^2\sigma_\epsilon^2}{(1+g)^2 {D_t}^2}$$

d.

$\mathrm{E}R_{t+1} = r$

无条件方差没有显式解。

e.

愿意购买，当无限期增长时，收益的无条件期望为 r，无条件方差是 0；

如果增长期是有限的，此时不愿意购买这个股票。

2.

a.

构造拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}w^T\Sigma w-\gamma(w^T1_3-1)-\beta(w^T\mu-\mu_e)$$

计算可知： $\partial L/_{\partial w}=\Sigma w-\gamma 1_3-\beta\mu$

联立 $\begin{cases}\partial L/_{\partial w}=0\\ \partial L/_{\partial \gamma}=0\\ \partial L/_{\partial \beta}=0\end{cases}$ 得 $w=\gamma\Sigma^{-1}1_3-\beta\Sigma^{-1}\mu$

将上式先后左乘1_3^T、μ^T

$\gamma 1_3^T\Sigma^{-1}1_3-\beta 1_3^T\Sigma^{-1}\mu=1$

$\gamma\mu^T\Sigma^{-1}1_3-\beta\mu^T\Sigma^{-1}\mu=\mu^Tw=\mu_e$

得到$\begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \mu_e\end{bmatrix}$，其中，A=$1_3^T\Sigma^{-1}1_3$，B=$\mu^T\Sigma^{-1}1_3$，C=$\mu^T\Sigma^{-1}\mu$

由于Σ是正定矩阵，故Σ^{-1}是正定矩阵，所以 A,C＞0

解上述二元线性方程组，得：

$$\gamma_e=\frac{C-B\mu_e}{AC-B^2}$$

$$\beta_e=\frac{A\mu_e-B}{AC-B^2}$$

此时

$$w_e=\gamma_e\Sigma^{-1}1_3-\beta_e\Sigma^{-1}\mu=\frac{(C-B\mu_e)\Sigma^{-1}1_3-(A\mu_e-B)\Sigma^{-1}\mu}{AC-B^2}$$

需要将 A、B、C 代入，求得$w_e=[\frac{21}{13}-\frac{17\mu_e}{26\mu},\frac{4\mu_e}{13\mu}-\frac{3}{13},\frac{9\mu_e}{26\mu}-\frac{5}{13}]$

这一小问评分标准：没有带入 A、B、C，求出w_e具体表达式的扣 2 分。

b.

由 $w_e = \gamma_e \Sigma^{-1} 1_3 - \beta_e \Sigma^{-1} \mu$可知

$$\sigma_e^2 = {w_e}^T \Sigma w_e = (\gamma_e \Sigma^{-1} 1_3 - \beta_e \Sigma^{-1} \mu)^T \Sigma (\gamma_e \Sigma^{-1} 1_3 - \beta_e \Sigma^{-1} \mu)$$

$$= (\gamma_e 1_3^T \Sigma^{-1} - \beta_e \mu^T \Sigma^{-1}) \Sigma (\gamma_e \Sigma^{-1} 1_3 - \beta_e \Sigma^{-1} \mu)$$

$$= 1_3^T \Sigma^{-1} 1_3 \gamma_e^2 + 2\mu^T \Sigma^{-1} 1_3 \gamma_e \beta_e + \mu^T \Sigma^{-1} \mu \beta_e^2$$

$$= A\gamma_e^2 + 2B\gamma_e \beta_e + C\beta_e^2$$

将γ_e、β_e带入得

$\sigma_e^2 = \frac{A\mu_e^2 + 2B\mu_e + C}{\mathrm{AC-B^2}} = a\mu_e^2 + b\mu_e + c$，其中$a = \frac{A}{\mathrm{AC-B^2}}$ $b = \frac{2B}{\mathrm{AC-B^2}}$ $c = \frac{C}{\mathrm{AC-B^2}}$

c.

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c = a(\mu_e + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

可得：$\frac{\sigma_e^2}{c - \frac{b^2}{4a}} - \frac{\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = 1$，所以（$\mu_e$，$\sigma_e$）构成双曲线的一支，

其渐近线为$\mu_e = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \sigma_e - \frac{b}{2a}$，交点为（0，$-\frac{b}{2a}$）

d.

3 个资产的收益-风险组合都在有效边界内部，两个资产所组成的所有资产组合也在该区域内部。具体证明如下：

$$\sigma_e^2 = \frac{A}{AC - B^2} \mu_e^2 - \frac{2B}{AC - B^2} \mu_e + \frac{C}{AC - B^2}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{|\Sigma|} \Sigma^* = \frac{1}{36\sigma^2(\rho - 1) \times (2\rho + 1)} \times \begin{bmatrix} -36 \times (1+\rho) & 18\rho & 12\rho \\ 18\rho & -9 \ \ (1+\rho) & 6\rho \\ 12\rho & 6\rho & -4 \ \ (1+\rho) \end{bmatrix}$$

$$A = 1^T \Sigma^{-1} 1 = (1,1,1)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (-36-6\rho, -9+15\rho, -4+14\rho)\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\frac{1}{36\sigma^2(\rho-1)\times(2\rho+1)}$$

$$A = \frac{23\rho-49}{36\sigma^2(\rho-1)\times(2\rho+1)}$$

$$B = 1^T\Sigma^{-1}\mu = \frac{1}{36\sigma^2(\rho-1)\times(2\rho+1)}\times(-36-6\rho, -9+15\rho, -4+14\rho)\times\begin{pmatrix}\mu\\2\mu\\3\mu\end{pmatrix}$$

$$B = -\frac{66u(1-\rho)}{36\sigma^2(\rho-1)\times(2\rho+1)}$$

$$C = \mu^T\Sigma_q^{-1}\mu = \frac{\mu^2}{36\sigma^2(\rho-1)\times(2\rho+1)}\times(1,2,3)\times\begin{pmatrix}-36+36\rho\\18\rho-18\\12\rho-12\end{pmatrix}$$

$$C = \frac{108\mu^2(\rho-1)}{36\sigma^2(\rho-1)\times(2\rho+1)},$$

$$\sigma_e^2 = -\frac{\sigma^2(23\rho-49)}{26\mu^2}\mu_e^2 + \frac{66\sigma^2(\rho-1)}{13\mu}\mu_e - \frac{54\sigma^2(\rho-1)}{13}$$

接下来证明资产组合在有效边界内部。

令$\mu_e = \mu$，得到

$\sigma_e^2 = -\frac{\sigma^2(23\rho-49)}{26} + \frac{66\sigma^2(\rho-1)}{13} - \frac{54\sigma^2(\rho-1)}{13} = \sigma^2\frac{25+\rho}{26} < \sigma^2\frac{25+1}{26} = \sigma^2$，

从而证明了$(\mu_{1,}\sigma_1)$在有效边界内部。

令$\mu_e = 3\mu$，得到

$\sigma_e^2 = \sigma^2\frac{333\rho-99}{26} < \sigma^2\frac{333-99}{26} = 9\sigma^2$，从而证明了$(\mu_{3,}\sigma_3)$在有效边界内部。

令$\mu_e = 2\mu$，得到

$\sigma_e^2 = \sigma^2\frac{32\rho+20}{13} < \sigma^2\frac{32+20}{13} = 4\sigma^2$，从而证明了$(\mu_{1,}\sigma_1)$与$(\mu_{3,}\sigma_3)$的资产组合在在有效边界内部。

这一小问评分标准：在证明资产组合在有效边界内部时，需要把σ_e^2的具体表达式求出来，没有具体表达式的扣 2 分。

3.

a．由上题得，

$$a=\frac{A}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}\quad b=\frac{2B}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}\quad c=\frac{C}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}$$

其中 A=$1_3^T\Sigma^{-1}1_3$，B=$\mu^T\Sigma^{-1}1_3$，C=$\mu^T\Sigma^{-1}\mu$

可知a、b、c是风险资产期望收益率、资产的风险（方差）、各资产之间的相关性（协方差）的函数。

b.

$$\sigma_e=\sqrt{a\mu_e^2+b\mu_e+c}$$
$$\sigma_e^2=a\mu_e^2+b\mu_e+c$$

考虑到市场组合、有效前沿曲线所在的坐标轴，x 轴是σ，y 轴是μ，即我们一般把μ看作σ的函数。所以两边对σ求导得，

$$2\sigma=2a\mu\frac{d\mu}{d\sigma}+b\frac{d\mu}{d\sigma}=(2a\mu+b)\times\frac{d\mu}{d\sigma}$$
$$\frac{d\mu}{d\sigma}=\frac{2\sigma}{2a\mu+b}$$

因为市场组合与无风险资产的连线与有效前沿曲线相切，且市场组合为切点。
综合以上信息，我们可以得到，

$$\begin{cases}\mu=\mu_M\\ \sigma=\sigma_M\\ \dfrac{d\mu_M}{d\sigma_M}=\dfrac{2\sigma_M}{2a\mu_M+b}\\ \dfrac{\mu_M-r_f}{\sigma_M}=\dfrac{d\mu_M}{d\sigma_M}\end{cases}$$

计算可得，

$$\mu_m = -\frac{br_f + 2c}{2ar_f + b},\ \sigma_m^2 = \sqrt{a\mu_m^2 + b\mu_m + c}$$

接下来我们来证明$\mu_m > r_f$,

$$\mu_m - r_f = -\frac{br_f + 2c}{2ar_f + b} - r_f = \frac{-2 \times \left(ar_f^2 + br_f + c\right)}{2ar_f + b} > 0,$$

由题目条件$r_f < -\frac{b}{2a}$，可得$b + 2ar_f < 0$，而可得$u_m - r_f > 0$，从而证明了$u_m > r_f$。

本小问评分标准：没有计算出μ_m具体表达式的扣 2 分，没有计算出只画图证明的酌情扣 1 分。

c. 不存在。言之有理即可。(利用抛物线的性质，有效前沿曲线只包括抛物线上半部分)

d.

$$EU = E\left[F_1 - \frac{1}{2}\lambda(F_1 - EF_1)^2\right]$$
$$EU = EF_1 - \frac{1}{2}\lambda E(F_1 - EF_1)^2$$

$$EF_1 = E\left[F_0 + F_0\left[(1-w)r_f + wR_m\right]\right]$$
$$EF_1 = F_0 + F_0\left[(1-w)r_f + wER_m\right]$$
$$EF_1 = F_0 + F_0\left[(1-w)r_f + wu_m\right]$$

$$E(F_1 - EF_1)^2 = E\left\{F_0 + F_0\left[(1-w)r_f + wR_m\right] - \left[F_0 + F_0(1-w)r_f + F_0wu_m\right]\right\}^2$$
$$E(F_1 - EF_1)^2 = E[F_0w(R_m - u_m)]^2 = F_0^2w^2E(R_m - u_m)^2 = F_0^2w^2Var(R_m) = F_0^2w^2\sigma_m^2$$

$$EU = EF_1 - \frac{1}{2}\lambda E(F_1 - EF_1)^2 = F_0 + F_0\left[(1-w)r_f + wu_m\right] - \frac{1}{2}\lambda F_0^2w^2\sigma_m^2$$
$$EU = F_0 + F_0r_f + \left(u_m - r_f\right)F_0w - \frac{1}{2}\lambda F_0^2\sigma_m^2w^2$$

从而可以得到，$w^* = -\frac{(u_m - r_f)F_0}{2\left(-\frac{1}{2}\lambda F_0^2\sigma_m^2\right)} = \frac{u_m - r_f}{\lambda\sigma_m^2} \times \frac{1}{F_0}$

这一小问评分标准：计算过程中全程没有涉及到本题条件中给出的F_0，照搬去年答案的情况，这一小问分全扣。计算过程正确，结果错误的扣 1 分。

e. w^*随 λ 增大而减小。