武汉大学本科金融学专业 2019 秋季学期公司金融

第 2 次作业

提交日期：11 月 13 日

1. 考虑增长型公司有风险的股利折现模型。假设公司每一期的股利 D_t 是随机的，且满足如下 1-阶自回归过程：
$$D_t = (1+g)D_{t-1} + \epsilon_t,$$
初始值为 $D_0 > 0$，g 为股利的（确定性）增长率且满足 $0 < g < r$，r 为常数折现率；ϵ_t 为 iid 随机冲击，$\mathbb{E}\epsilon_t = 0$，$\mathrm{var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$。
   a. 计算股利的条件期望 $\mathbb{E}_t D_{t+n} \equiv \mathbb{E}(D_{t+n}|D_t)$，$n \geq 1$。注：$D_t$ 与 ϵ_{t+n} 是相互独立的，$n \geq 1$。
   b. 定义第 t 期支付完股利 D_t 之后的股票价格为 P_t，使用期望折现股利计算 P_t 如下：
$$P_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}_t D_{t+n}}{(1+r)^n}.$$
利用上问的结论，计算 P_t 作为 D_t 的函数表达式。
   c. 假设 t 期股利为 D_t，你以股利后价格 P_t 买入股票，持有到 $t+1$，收到股利 D_{t+1} 之后又以价格 P_{t+1} 卖出。定义收益率为
$$R_{t+1} = \frac{D_{t+1} + P_{t+1}}{P_t} - 1.$$
注意在 t 期已知 D_t 的条件下，D_{t+1} 和 P_{t+1} 都是随机的。请尝试计算收益率 R_{t+1} 的条件期望 $\mathbb{E}_t R_{t+1} \equiv \mathbb{E}(R_{t+1}|D_t)$ 以及条件方差 $\mathrm{var}_t(R_{t+1})$；若无法计算，请说明原因。注：条件方差的定义为
$$\mathrm{var}_t(R_{t+1}) = \mathbb{E}\left[\left(R_{t+1} - \mathbb{E}(R_{t+1}|D_t)\right)^2 \middle| D_t\right].$$
   d. 你可以计算随机收益率 R_{t+1} 的无条件期望 $\mathbb{E}R_{t+1}$和无条件方差 $\mathrm{var}(R_{t+1})$ 的表达式吗？
   e. 请问你愿意购买这样的增长型股票吗，为什么？如果增长期是有限的，到某个时刻 T 之后股利就变为平稳序列，此时你还愿意购买这个股票吗？
2. 考虑一个 3 资产的均值方差资产组合问题。这 3 个资产的期望收益率分别为
$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]^\top = [\mu, 2\mu, 3\mu]^\top,$$
其中 $\mu > 0$；3 个资产收益率的协方差矩阵为
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \rho\sigma_1\sigma_3 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho\sigma_2\sigma_3 \\ \rho\sigma_1\sigma_3 & \rho\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_1^2 = \sigma^2, \qquad \sigma_2^2 = 4\sigma^2, \qquad \sigma_3^2 = 9\sigma^2,$$

其中 $\sigma^2 > 0$，ρ 表示任意两个资产收益率的相关系数。组合权重向量记做 $\boldsymbol{w} = [u, v, 1-u-v]^\top$。

a. 对给定的组合收益率μ_e，请计算方差最小组合的权重向量 $\boldsymbol{w}_e = [u_e, v_e, 1-u_e-v_e]^\top$，即求解如下约束最小化问题：

$$\min_{u,v} \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}, \qquad s.t.\ \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e.$$

b. 请计算有效组合 (μ_e, σ_e) 的表达式，即将上述最小化问题所得的最小标准差 σ_e 表示为 μ_e 的函数。

c. 请说明有效组合 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支，并计算对应的两条渐近线及其交点。

d. 3 个资产的收益-风险组合 (μ_i, σ_i) 点是否在有效组合边界线所围成区域的内部？(μ_1, σ_1) 与 (μ_3, σ_3) 两个资产所得的所有资产组合，是否也在该区域的内部？

3. 给定风险资产均值方差组合的有效前沿 $\sigma_e = \sqrt{a\mu_e^2 + b\mu_e + c}$，其中 $a > 0 > b$；无风险利率为 $r_f > 0$。假设投资者选择的风险资产组合（市场组合）为 $\boldsymbol{w}_m$，组合收益率为 $R_m = \boldsymbol{w}_m^\top \boldsymbol{R}$，均值为 $\mu_m = \mathbb{E}R_m$，方差为 $\sigma_m^2 = \mathrm{var}(R_m)$。注意，市场组合是切点组合，即其与无风险点连线与有效前沿相切。

a. 首先，参考题 2 的计算示例（亦可参考去年 hw4 或者王江的教科书），说明 a, b, c 是市场中风险资产哪些特征的函数。

b. 假设 $r_f < -\frac{b}{2a}$，请计算此时市场组合收益的期望 μ_m 与方差 σ_m^2 关于 a, b, c 及 r_f 的表达式，并说明$\mu_m > r_f$，Sharpe 比率为正。

c. 其次，若 $r_f \geq -\frac{b}{2a}$，请问此时是否存在市场组合（最优组合），并解释原因。

d. 假设投资者的初始财富为F_0，选择无风险资产与风险资产（市场组合）的权重为 $1-w$ 与 w，最终获得的财富回报为

$$F_1 = (1-w)F_0\left(1+r_f\right) + wF_0(1+R_m) = F_0 + F_0\left[(1-w)r_f + wR_m\right].$$

投资者的最终效用为终端财富 F_1 函数：$U = F_1 - \frac{1}{2}\lambda(F_1 - \mathbb{E}F_1)^2$，目标是最大化期望效用。请求解投资者的最优无风险、风险资产配置决策 w^*。

e. 投资者的最优风险资产配置如何随着 λ 的改变而改变？