



高级宏观经济学 I

第 7 讲：OLG 模型

授课人：刘 岩

中山大学管理学院（创业学院）

2025 年 11 月 11 日



本讲内容

- ① 基础
- ② Diamond 模型
- ③ Pareto 无效

本节内容

- 1 基础
- 2 Diamond 模型
- 3 Pareto 无效

OLG 模型：类型

- 现代主流宏观理论有两类型理论框架，一类是无穷期 (infinite horizon) 模型，另一类是世代交叠 (overlapping generations, OLG) 模型
- 无穷期模型中，决策主体的存续期无穷，选择无穷期行动路径 (action path)，最大化无穷期加总效用
- 基准 OLG 模型中，决策主体存续期有限，到期退出后，有新的决策主体进入模型经济，替换前一代决策主体
 - 经典文献包括 Allais (1947), Samuelson (1958), Diamond (1965)
- 还有一类 OLG 模型称为永久青春 (perpetual youth) 模型，这类模型中每代决策主体每期会以一定概率退出模型经济，同时可以有新主体加入作为补充
 - Blanchard (1985), Weil (1989)

Samuelson 模型

- 每代 (cohort) 人存续两期，青年 (y) 和老年 (o)，出生在 t 期的人效用为

$$u_t(c_y, c_o) = u(c_y) + \beta u(c_o), \quad t \geq 0$$

- 出生在 $t = -1$ 的人，只在经济开始的 $t = 0$ 有效用 $u_{-1}(c) = u(c)$
- t 代人口的禀赋为 $(\omega_{y,t}, \omega_{o,t+1})$
 - $\omega_{o,t}$ 是 $t-1$ 代人老年时，即 t 期时的禀赋
- t 代人可以持有资产 a_{t+1} ，价格为 q_t ，以此最大化效用

竞争性均衡：定义

定义 1

消费序列 $\{c_{i,t}^*\}_{t=0}^{\infty}$, $i \in \{y, o\}$, 资产序列 $\{a_{t+1}^*\}_{t=0}^{\infty}$, 以及价格序列 $\{q_t\}_{t=0}^{\infty}$ 称为一个竞争均衡, 若满足如下条件:

- ① 对任意 $t > 0$, $(c_{y,t}^*, c_{o,t+1}^*, a_{t+1}^*)$ 是下述效用最大化问题的解

$$\max_{c_y, c_o, a'} u(c_y) + \beta u(c_o) \quad \text{s.t.} \quad c_y + q_t a' \leq \omega_{y,t} \text{ and } c_o \leq \omega_{o,t+1} + a',$$

此外, $c_{o,0} \leq \omega_{o,0}$

- ② 对任意 $t \geq 0$, 市场出清 $c_{y,t}^* + c_{o,t}^* = \omega_{y,t} + \omega_{o,t}$

均衡资产交易与价格

- 结论：Samuelson 模型中，均衡资产 $a_{t+1}^* = 0$ ，即 $c_{y,t}^* = \omega_{y,t}, c_{o,t+1}^* = \omega_{o,t+1}$
- 相应的资产价格由个人 Euler 方程确定

$$q_t u'(c_{y,t}^*) = \beta u'(c_{o,t+1}^*) \Rightarrow q_t = \beta \frac{u'(\omega_{o,t+1})}{u'(\omega_{y,t})}, \quad t \geq 0$$

- 进一步考虑一个平稳设定： $\omega_{y,t} \equiv \omega_y, \omega_{o,t} \equiv \omega_o$ ，进一步假设 $u(c)$ 为 CRRA 效用，求解此时均衡

$$q_t \equiv q = \beta \frac{(\omega_o)^{-\sigma}}{(\omega_y)^{-\sigma}} = \beta \left(\frac{\omega_y}{\omega_o} \right)^{\sigma}$$

当 $\omega_y > \omega_o$ 时，可能有 $q > 1$ ，意味着利率为负；换言之，尽管消费者希望平滑两期消费，但市场价格阻止消费者如此选择，这一特征与 OLG 模型中均衡可能并非 Pareto 有效，有着密切联系

本节内容

- 1 基础
- 2 Diamond 模型
- 3 Pareto 无效

Diamond 模型基础

- 在 Samuelson 模型基础上, 增加生产
- 假设青年劳动供给为 $l_y \geq 0$, 老年为 $l_o \geq 0$, 均为常数, 且归一化 $l_y + l_o = 1$; 消费者效用函数中略去劳动供给带来的效用损失
- 生产函数为 $F(k, l)$, 由于常数劳动供给 $l = l_y + l_o = 1$, 故每期产出 $F(k, 1)$ 仅取决于资本存量 k ; 资本使用折旧率为 $\delta \in (0, 1)$, 即 k_t 投入生产后, 期末或下期初折旧后剩余 $(1 - \delta)k_t$
- 年轻时可以储蓄, 积累资本, 老年时租给企业使用, 获得回报率 r_t
- 给定初始资本存量 $k_0 > 0$, 由初期老年人持有

均衡定义

定义 2

消费序列 $\{c_{i,t}^*\}_{t=0}^{\infty}$, $i \in \{y, o\}$, 资本序列 $\{k_{t+1}^*\}_{t=0}^{\infty}$, 以及价格序列 $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$ 和 $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$ 构成一个竞争均衡, 若满足如下条件:

- ① 对任意 $t > 0$, $(c_{y,t}^*, c_{o,t+1}^*, k_{t+1}^*)$ 是下述效用最大化问题的解

$$\max_{c_y, c_o, k'} u(c_y) + \beta u(c_o) \quad \text{s.t.} \quad c_y + k' \leq w_t \ell_y \text{ and } c_o \leq w_{t+1} \ell_o + (1 - \delta + r_{t+1})k',$$

此外, $c_{o,0} \leq w_0 \ell_o + (1 - \delta + r_0)k_0$

- ② 对任意 $t \geq 0$, 资本租金率与工资率竞争性决定, 即 $r_t = F_1(k_t^*, 1)$, $w_t = F_2(k_t^*, 1)$
其中 $k_0^* = k_0$
- ③ 对任意 $t \geq 0$, 市场出清 $c_{y,t}^* + c_{o,t}^* + k_{t+1}^* = F(k_t^*, 1) + (1 - \delta)k_t^*$

均衡刻画

- 消费者 Euler 方程: $u'(c_{y,t}) = \beta u'(c_{o,t+1})(1 - \delta + r_{t+1})$
- 利用价格表达式和预算约束, 上述 Euler 方程转换为 k_t, k_{t+1} 的非线性方程

$$u'(\ell_y F_2(k_t^*, 1) - k_{t+1}^*) = \beta u'(\ell_o F_2(k_{t+1}^*, 1) + (1 - \delta + F_1(k_{t+1}^*, 1))k_{t+1}^*)(1 - \delta + F_1(k_{t+1}^*, 1))$$

给定 k_t^* , 可直接解出 k_{t+1}^*

- 定义稳态 (steady state) 为 $k_t^* = k_{t+1}^* = \dots = \bar{k}, \forall t \geq 0$ 的状态, 即一旦经济处于稳态, 则均衡资本不变; $\bar{k}$ 满足的条件为

$$u'(\ell_y F_2(\bar{k}, 1) - \bar{k}) = \beta u'(\ell_o F_2(\bar{k}, 1) + (1 - \delta + F_1(\bar{k}, 1))\bar{k})(1 - \delta + F_1(\bar{k}, 1))$$

- 求解均衡路径和稳态: $u(c)$ CRRA, $\ell_y = 1, \ell_o = 0, \delta = 0$, 以及 $F(k, \ell) = k^\alpha \ell^{1-\alpha}$

资本动态

- 前述假设下，由 Euler 方程与预算约束，可得

$$c_{y,t} + \frac{(1+r_{t+1})^{(1-\sigma)/\sigma}}{\beta^{-1/\sigma}} c_{y,t} = w_t \Rightarrow c_{y,t} = \frac{\beta^{-1/\sigma}}{\beta^{-1/\sigma} + (1+r_{t+1})^{(1-\sigma)/\sigma}} w_t$$

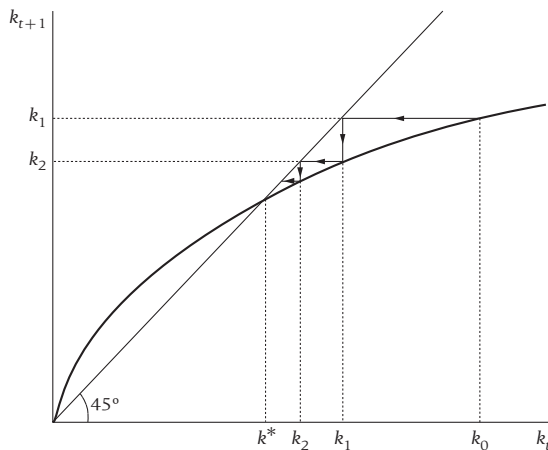
- 定义储蓄率 $s(r) = \frac{(1+r)^{(1-\sigma)/\sigma}}{\beta^{-1/\sigma} + (1+r)^{(1-\sigma)/\sigma}}$ ，则有 $c_{y,t} = [1 - s(r_{t+1})]w_t$
- 相应的

$$k_{t+1} = s(r_{t+1})w_t = s(f'(k_{t+1}))[f(k_t) - k_t f'(k_t)]$$

其中 $f(k) = F(k, 1)$ ，此处仅需假设 F 满足规模报酬不变并可微

log + CD 特例

对数效用 $\sigma = 1$, CD 生产函数 $f(k) = k^\alpha$, 此时 $k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta} k_t^\alpha$, $\bar{k} = \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta} \right)^{1/(1-\alpha)}$



本节内容

- 1 基础
- 2 Diamond 模型
- 3 Pareto 无效

无穷期带来的问题

- Samuelson 或者 Diamond OLG 模型中，竞争均衡可能不是 Pareto 有效的，由于这一特性与经济的无穷期结构有关，而非普通的外部性或市场势力等原因，因此称为动态无效 (dynamic inefficiency)
- 后续文献有一系列动态有效/无效的理论刻画，如 Balasko and Shell (1980), Abel et al. (1989), Abel and Panageas (2025)

禀赋经济中均衡的 Pareto 有效性

- 考虑特例 $u(c) = \log c$, $\beta = 1$, 及常数禀赋 $\omega_{y,t} = \omega_y, \omega_{o,t+1} = \omega_o$
- 两期预算约束合并为 $c_y + q_t c_o = \omega_y + q_t \omega_o$, 利用 CD 效用的性质, 直接可得

$$c_{y,t} = \frac{1}{2}(\omega_y + q_t \omega_o), \quad c_{o,t+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_y}{q_t} + \omega_o \right)$$

相应的储蓄为 $a_{t+1} = \omega_y - c_{y,t} = (\omega_y - q_t \omega_o)/2$

- $t = 0$ 时老年人消费为 $c_{o,0} = \omega_o$, 而市场出清条件为 $c_{o,0} + c_{y,0} = \omega_o + \omega_y$, 故 $c_{y,0} = \omega_y$
- 类似可得 $c_{y,t} = \omega_y, c_{o,t} = \omega_o$, 以及 $q_t = \frac{\omega_y}{\omega_o}$

数值示例

- 考虑 $\omega_y = 3, \omega_o = 1$, 此时 $q = 3$, 相应的资产回报率为 $r = 1/q - 1 = -\frac{2}{3}$
- 此时 $t \geq 0$ 代人的效用为 $\log 3 + \log 1 = \log 3$, $t = -1$ 代老人在 $t = 0$ 时的效用为 $\log 1 = 0$
- 考虑另一个可行 (feasible) 配置: $\tilde{c}_{y,t} = \tilde{c}_{o,t} = 2$, 为何可行?
- 显然, 此配置让所有人的福利得到改善, 故原竞争均衡不是 Pareto 最优
- 考虑另一个数值例子 $\omega_y = 1, \omega_o = 3$, 此时 $q = 1/3$; 但前述 $\tilde{c}_{y,t}, \tilde{c}_{o,t}$ 不再满足相对竞争均衡的 Pareto 改善条件, 因为 $t = 0$ 时老年人福利恶化

参考文献 I

- ABEL, A. B., N. G. MANKIW, L. H. SUMMERS, AND R. J. ZECKHAUSER (1989): "Assessing Dynamic Efficiency: Theory and Evidence," *Review of Economic Studies*, 56, 1–19.
- ABEL, A. B. AND S. PANAGEAS (2025): "Running Primary Deficits Forever in a Dynamically Efficient Economy: Feasibility and Optimality," *Econometrica*, 93, 1601–1633.
- ALLAIS, M. (1947): *Economie et Interet*, Paris: Imprimerie Nationale.
- BALASKO, Y. AND K. SHELL (1980): "The Overlapping-Generations Model, I: The Case of Pure Exchange without Money," *Journal of Economic Theory*, 23, 281–306.
- BLANCHARD, O. J. (1985): "Debt, Deficits, and Finite Horizons," *Journal of Political Economy*, 93, 223–247.
- DIAMOND, P. A. (1965): "National Debt in a Neoclassical Growth Model," *American Economic Review*, 55, 1126–1150.
- SAMUELSON, P. A. (1958): "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money," *Journal of Political Economy*, 66, 467–482.
- WEIL, P. (1989): "Overlapping Families of Infinitely-Lived Agents," *Journal of Public Economics*, 38, 183–198.