

第七章

匹配方法与回归方法比较

叶立欢

2020.11.19

目录

- 7.1 匹配方法与回归方法的相同点
- 7.2 匹配方法与回归方法的差异
- 7.3 总结

第一节

匹配方法与回归方法的相同点

简单的例子引入

- ID是个体编号，Y是观测结果（健康情况），D是处置与否（服药与否），AGE是可观测特征（年龄）。

ID	Y	D	AGE
1	10	1	30
2	5	1	30
3	12	0	30
4	6	0	30
5	5	1	40
6	12	1	40
7	7	0	40
8	4	0	40
9	6	0	40
10	5	0	40

简单的例子引入

- 按年龄和接受处置与否分成四组，得到每组Y的平均值和人数（括号中数值）。

	D = 1	D = 0
AGE=30	7.5 (2)	9 (2)
AGE=40	8.5 (2)	5.5 (4)

- 假设一：数据满足潜在未处置结果均值条件独立假设
 - $$E[Y_i(0)|D_i = 1, AGE_i = age] = E[Y_i(0)|D_i = 0, AGE_i = age]$$
$$= E[Y_i(0)|AGE_i = age]$$

简单的例子引入

- 通过观测结果估计ATT:

$$ATT(AGE_i = age)$$

$$= E[Y_i(1)|D_i = 1, AGE_i = age] - E[Y_i(0)|D_i = 1, AGE_i = age]$$

$$= E[Y_i(1)|D_i = 1, AGE_i = age] - E[Y_i(0)|D_i = 0, AGE_i = age]$$

$$= \underbrace{E[Y_i | D_i = 1, AGE_i = age]}_{\text{年龄为age的处置组平均观测结果}} - \underbrace{E[Y_i | D_i = 0, AGE_i = age]}_{\text{年龄为age的控制组平均观测结果}}$$

年龄为age的处置组平均观测结果 年龄为age的控制组平均观测结果

- 假设二：数据满足潜在处置结果均值条件独立假设

- $E[Y_i(1)|D_i = 1, AGE_i = age] = E[Y_i(1)|D_i = 0, AGE_i = age]$

$$= E[Y_i(1)|AGE_i = age]$$

- $ATT(AGE_i = age) = ATU(AGE_i = age) = ATE(AGE_i = age)$

简单的例子引入

- 用样本均值估计平均观测结果：

- 处置组：
$$\bar{Y}_1(AGE_i = age) = \frac{1}{N_1^{age}} \sum_{i=1}^{N_1^{age}} Y_{1i}(AGE_i = age)$$

$$\rightarrow E[Y_i | D_i = 1, AGE = age]$$

- 控制组：
$$\bar{Y}_0(AGE_i = age) = \frac{1}{N_0^{age}} \sum_{i=1}^{N_0^{age}} Y_{0i}(AGE_i = age)$$

$$\rightarrow E[Y_i | D_i = 0, AGE = age]$$

- N代表处置组或控制组中年龄等于age的人数，Y代表处置组或控制组中年龄等于age的个体i的观测结果。

简单的例子引入

- 假设一成立：
 - $\widehat{ATT}(AGE_i = age) = \bar{Y}_1(AGE_i = age) - \bar{Y}_0(AGE_i = age)$
- 假设一、二同时成立：
 - $\widehat{ATE}(AGE_i = age) = \bar{Y}_1(AGE_i = age) - \bar{Y}_0(AGE_i = age)$
- 使用不同权重估计ATT和ATE：
 - $\widehat{ATT} = \sum_{age} P(AGE_i = age | D = 1) \times \widehat{ATT}(AGE_i = age)$
 - $\widehat{ATE} = \sum_{age} P(AGE_i = age) \times \widehat{ATE}(AGE_i = age)$

7.1.1 精确匹配法

- 对年龄为30岁的:

- 处置组: $\bar{Y}_1(AGE_i = 30) = \frac{10+5}{2} = 7.5$

- 控制组: $\bar{Y}_0(AGE_i = 30) = \frac{12+6}{2} = 9$

- 平均处置效应: $\widehat{ATE}(AGE_i = 30) = \bar{Y}_1(AGE_i = 30) - \bar{Y}_0(AGE_i = 30) = -1.5$

- 对年龄为40岁的:

- 处置组: $\bar{Y}_1(AGE_i = 40) = \frac{5+12}{2} = 8.5$

- 控制组: $\bar{Y}_0(AGE_i = 40) = \frac{7+4+6+5}{4} = 5.5$

- 平均处置效应: $\widehat{ATE}(AGE_i = 40) = \bar{Y}_1(AGE_i = 40) - \bar{Y}_0(AGE_i = 40) = 3$

7.1.1 精确匹配法

- 匹配相对回归方法的优点：
 - 通过相减，年龄对健康的影响已经去除，不需要假设年龄与健康的关系。
- 计算 \widehat{ATE} ，用不同年龄人数的比率 $P(AGE_i = age)$ 为权重：
 - $\widehat{ATE} = P(AGE_i = 30) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 30) + P(AGE_i = 40) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 40) = \frac{4}{10}(-1.5) + \frac{6}{10} \times 3 = 1.2$
- 精确匹配法允许不同年龄的平均处置效应是不同的，即允许异质处置效应。要得到总体平均处置效应，应当使用相应人数比例进行加权平均。

7.1.2 回归方法：完全饱和模型

- 完全饱和模型：对解释变量（包括控制变量和处置变量）的所有可能组合值都有对应系数的回归模型。
- 用4个虚拟变量D0AGE30、D1AGE30、D0AGE40、D1AGE40来代表四个可能组合。

■ Stata 命令：

```
gen D0AGE30=(D==0 & AGE==30)
```

```
gen D1AGE30=(D==1 & AGE==30)
```

```
gen D0AGE40=(D==0 & AGE==40)
```

```
gen D1AGE40=(D==1 & AGE==40)
```

7.1.2 回归方法：完全饱和模型

- 将完全饱和回归模型设置如下：

$$Y_i = \beta_1 D0AGE30_i + \beta_2 D1AGE30_i + \beta_3 D0AGE40_i + \beta_4 D1AGE40_i + e_i$$

- 这里不包括截距常数项，避免共线性：

$$1 = D0AGE30_i + D1AGE30_i + D0AGE40_i + D1AGE40_i$$

- 完全饱和回归模型对应的条件期望函数：

$$E(Y_i | D0AGE30_i, D1AGE30_i, D0AGE40_i, D1AGE40_i)$$

$$= \beta_1 D0AGE30_i + \beta_2 D1AGE30_i + \beta_3 D0AGE40_i + \beta_4 D1AGE40_i$$

- 系数的含义为：

- β_1 为当 $D_i = 0, AGE_i = 30$ 时， Y_i 的均值；其他同理。

7.1.2 回归方法：完全饱和模型

- 饱和模型的系数对应了不同年龄处置组和控制组观测结果的均值，则有：

$$ATE(AGE_i = 30) =$$

$$E[Y_i | D_i = 1, AGE_i = 30] - E[Y_i | D_i = 0, AGE_i = 30] = \beta_2 - \beta_1$$

$$ATE(AGE_i = 40) =$$

$$E[Y_i | D_i = 1, AGE_i = 40] - E[Y_i | D_i = 0, AGE_i = 40] = \beta_4 - \beta_3$$

- Stata 回归：

```
reg Y D0AGE30 D1AGE30 D0AGE40 D1AGE40, noconstant
```

7.1.2 回归方法：完全饱和模型

- 回归结果如下：

Y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
D0AGE30	9	2.236068	4.02	0.007	3.528539	14.47146
D1AGE30	7.5	2.236068	3.35	0.015	2.028539	12.97146
D0AGE40	5.5	1.81139	3.48	0.013	1.631093	9.368907
D1AGE40	8.5	2.236068	3.80	0.009	3.028539	13.97146

- 样本回归估计值为：

$$\widehat{ATE}(AGE_i = 30) = \widehat{\beta}_2 - \widehat{\beta}_1 = 7.5 - 9 = -1.5$$

$$\widehat{ATE}(AGE_i = 40) = \widehat{\beta}_4 - \widehat{\beta}_3 = 8.5 - 5.5 = 3$$

$$\widehat{ATE} = P(AGE_i = 30) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 30) + P(AGE_i = 40) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 40) = \frac{4}{10}(-1.5) + \frac{6}{10} \times 3 = 1.2$$

- 饱和回归模型解释变量的系数是求解样本中不同年龄控制组和处置组的平均观测结果。

7.1.2 回归方法：完全饱和模型

- 在模型中加入截距项，为避免共线性，需去掉一个虚拟变量：

$$Y_i = \alpha + \gamma_1 D1AGE30_i + \gamma_2 D0AGE40_i + \gamma_3 D1AGE40_i + e_i$$

- 完全饱和回归模型对应的条件期望函数：

$$E(Y_i | D1AGE30_i, D0AGE40_i, D1AGE40_i)$$

$$= \alpha + \gamma_1 D1AGE30_i + \gamma_2 D0AGE40_i + \gamma_3 D1AGE40_i$$

- 系数的含义为：

- α 为当 $D_i = 0, AGE_i = 30$ 时， Y_i 的均值； $\alpha + \gamma_1$ 为当 $D_i = 1, AGE_i = 30$ 时， Y_i 的均值； $\alpha + \gamma_2$ 为当 $D_i = 0, AGE_i = 40$ 时， Y_i 的均值； $\alpha + \gamma_3$ 为当 $D_i = 1, AGE_i = 40$ 时， Y_i 的均值。

7.1.2 回归方法：完全饱和模型

- 则有：

$$ATE(AGE_i = 30) = E[Y_i | D_i = 1, AGE_i = 30] -$$

$$E[Y_i | D_i = 0, AGE_i = 30] = \alpha + \gamma_1 - \alpha = \gamma_1$$

$$ATE(AGE_i = 40) = E[Y_i | D_i = 1, AGE_i = 40] -$$

$$E[Y_i | D_i = 0, AGE_i = 40] = \alpha + \gamma_3 - (\alpha + \gamma_2) = \gamma_3 - \gamma_2$$

- Stata 回归：

```
reg Y D1AGE30 D0AGE40 D1AGE40
```


7.1.2 回归方法：完全饱和模型

- 回归结果如下：

Y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
D1AGE30	-1.5	3.162278	-0.47	0.652	-9.237815	6.237815
D0AGE40	-3.5	2.738613	-1.28	0.248	-10.20114	3.201144
D1AGE40	-.5	3.162278	-0.16	0.880	-8.237815	7.237815
_cons	9	2.236068	4.02	0.007	3.528539	14.47146

- 样本回归估计值为：

$$\widehat{ATE}(AGE_i = 30) = \widehat{\gamma}_1 = -1.5$$

$$\widehat{ATE}(AGE_i = 40) = \widehat{\gamma}_3 - \widehat{\gamma}_2 = -0.5 - (-3.5) = 3$$

- 完全饱和回归模型和精确匹配得到结果完全一致。

第二节

匹配方法与回归方法的差异

7.2.1 控制变量饱和模型

- 控制变量饱和模型：对控制变量的所有可能组合值都有一个对应系数的回归模型。
- 用2个虚拟变量AGE30和AGE40来代表两个可能组合：
 - 当 $AGE_i=30$ 时， $AGE30_i=1$ ；否则， $AGE30_i=0$ ；
当 $AGE_i=40$ 时， $AGE40_i=1$ ；否则， $AGE40_i=0$ 。
 - Stata 命令：
 $gen\ AGE30=(AGE==30)$
 $gen\ AGE40=(AGE==40)$

7.2.1 控制变量饱和模型

- 将控制变量饱和模型设置如下：

$$Y_i = \beta D_i + \phi_1 AGE_{30}_i + \phi_2 AGE_{40}_i + e_i$$

- 这里不包括截距常数项，避免共线性：

$$AGE_{30}_i + AGE_{40}_i = 1$$

- D和AGE不再有交叉项，意味着对于不同年龄只有一个相同的处置效应估计值 β 。

- 从条件期望值来看系数的含义：

- ϕ_1 为当 $D_i = 0, AGE_i = 30$ 时， Y_i 的均值； $\beta + \phi_1$ 为当 $D_i = 1, AGE_i = 30$ 时， Y_i 的均值； ϕ_2 为当 $D_i = 0, AGE_i = 40$ 时， Y_i 的均值； $\beta + \phi_2$ 为当 $D_i = 1, AGE_i = 40$ 时， Y_i 的均值

7.2.1 控制变量饱和模型

- 则有：

$$ATE(AGE_i = 30) = E[Y_i | D_i = 1, AGE_i = 30] -$$

$$E[Y_i | D_i = 0, AGE_i = 30] = \beta + \phi_1 - \phi_1 = \beta$$

$$ATE(AGE_i = 40) = E[Y_i | D_i = 1, AGE_i = 40] -$$

$$E[Y_i | D_i = 0, AGE_i = 40] = \beta + \phi_2 - \phi_2 = \beta$$

- Stata 回归：

reg Y D AGE30 AGE40, noconstant

7.2.1 控制变量饱和模型

- 回归结果如下：

Y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
D	1.071429	2.093305	0.51	0.625	-3.87845	6.021307
AGE30	7.714286	1.910917	4.04	0.005	3.195685	12.23289
AGE40	6.142857	1.48019	4.15	0.004	2.642764	9.64295

- 样本回归估计值为：

$$\widehat{ATE}(AGE_i = 30) = \widehat{ATE}(AGE_i = 40) = \hat{\beta} = 1.07$$

- 与精确匹配法和完全饱和模型得到的 $\widehat{ATE} = 1.2$ 略有出入。

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：估计权重差异

- 在精确匹配模型或完全饱和回归模型中， \widehat{ATE} 是每个 $\widehat{ATE}(AGE_i)$ 的加权平均值，其权重为处置组中不同年龄个体的比率，即：

$$\widehat{ATE} = P(AGE_i = 30) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 30) + P(AGE_i = 40) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 40)$$

- 在控制变量饱和回归模型中：

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \omega(AGE_i = 30) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 30) + \omega(AGE_i = 40) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 40) \\ &= \frac{Var(D_i|AGE_i=30)P(AGE_i=30)}{Var(D_i|AGE_i=30)P(AGE_i=30)+Var(D_i|AGE_i=40)P(AGE_i=40)} \times \widehat{ATE}(AGE_i = 30) \\ &+ \frac{Var(D_i|AGE_i=40)P(AGE_i=40)}{Var(D_i|AGE_i=30)P(AGE_i=30)+Var(D_i|AGE_i=40)P(AGE_i=40)} \times \widehat{ATE}(AGE_i = 40) \end{aligned}$$

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：估计权重差异

- D_i 的条件样本方差为：

- $Var(D_i|AGE_i = 30)$

$$=P(D_i = 1|AGE_i = 30)(1 - P(D_i = 1|AGE_i = 30)) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

- $Var(D_i|AGE_i = 40)$

$$=P(D_i = 1|AGE_i = 40)(1 - P(D_i = 1|AGE_i = 40)) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$$

$$\omega(AGE_i = 30) = 0.43; \quad \omega(AGE_i = 40) = 0.57$$

$$\hat{\beta} = \omega(AGE_i = 30) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 30) + \omega(AGE_i = 40) \times \widehat{ATE}(AGE_i = 40)$$

$$= 0.43 \times (-1.5) + 0.57 \times 3 = 1.07$$

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：估计权重差异

- 回归方法估计系数是最小化估计方差，对方差越小的 $\widehat{ATE}(AGE_i = age)$ 赋予权重越大。当处置变量方差 $Var(D_i | AGE_i = age)$ 越大时， $\widehat{ATE}(AGE_i = age)$ 方差越小，因此被赋予较大的权重。
- 对于给定 $X_i = \mathbf{x}$ ，当处置组和控制组人数相同时， $Var(D_i | X_i = \mathbf{x})$ 最大化，最大值为0.25；若只有处置组或控制组， $Var(D_i | X_i = \mathbf{x}) = 0$ ，则 $\widehat{ATE}(X_i = \mathbf{x})$ 权重为0。

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：估计权重差异

- 要使精确匹配/完全饱和模型与控制变量饱和模型得到结果完全一致，处置效应需不存在差异化，即 $\widehat{ATE}(X_i = \mathbf{x})$ 为常数。由于控制变量饱和模型的处置变量系数 $\hat{\beta}$ 使用的权重并不符合ATE对权重的定义，因此并非ATE的一致或无偏估计量。

■ 实际运用：

非饱和模型： $Y_i = \beta D_i + \phi AGE_i + e_i$

不同年龄对收入的影响一样，都等于 ϕ 。

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：缺乏共同支撑域和控制变量不均衡

- 共同支撑域：指处置组和控制组控制变量的分布范围是否重叠。
- 均衡性：指处置组和控制组控制变量的均值是否接近。
 - 回归方法中，未进行共同支撑域和均衡检验，在不重叠不均衡的情况下，回归估计的处置效应依赖于回归模型的函数设定是否正确，即使正确，稳健性较低。

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 假设收入只受受教育程度和智商的影响。

ID	INC1	College	IQ	ID	INC1	College	IQ
1	15283	0	58	11	25281	1	101
2	15539	0	61	12	25467	1	102
3	15986	0	64	13	26622	1	116
4	16687	0	66	14	27781	1	120
5	16841	0	68	15	27675	1	127
6	17087	0	76	16	27347	1	129
7	18117	0	82	17	28334	1	133
8	20260	0	90	18	28671	1	135
9	19472	0	90	19	29705	1	146
10	18811	0	93	20	29809	1	147

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 匹配方法：完全饱和模型和控制变量饱和模型
 - 精确匹配法：数据不满足共同支撑域要求，无法匹配。
 - 完全饱和模型：先通过回归系数估计得到不同智商处置组（上大学个体）和控制组（没上大学个体），无处置组和控制组都存在的观测结果，无法估计。
 - 控制变量饱和模型：对于只有处置组或控制组的数据，权重为0，无法估计处置效应 \widehat{ATE} 。

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 回归方法：非饱和回归模型

$$INC_i = \alpha + \beta_1 College_i + \beta_2 IQ_i + e_i$$

- 假设 IQ和INC的关系是线性的：IQ值每增加1，收入均值增加 β_2 。
- Stata 回归：

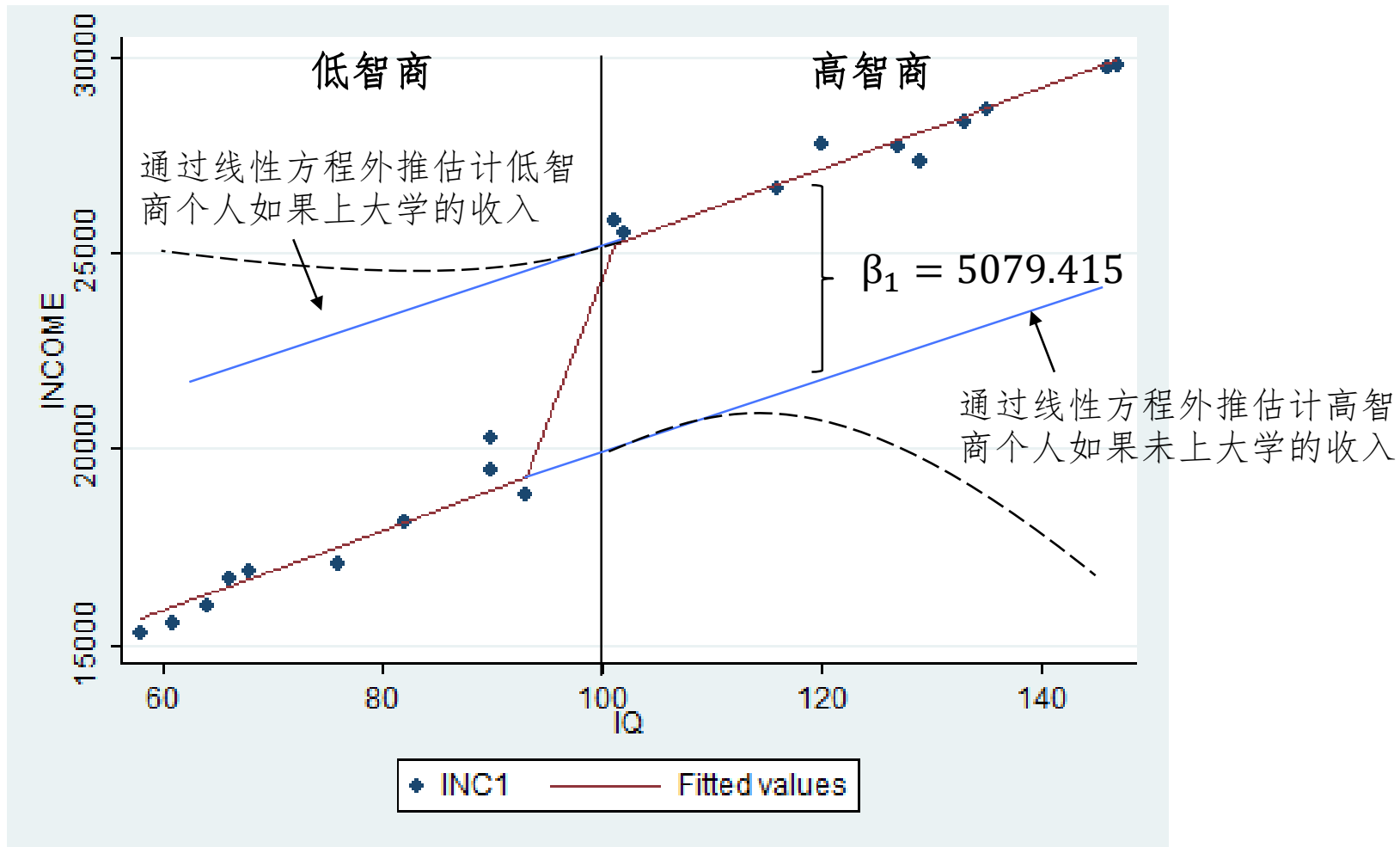
```
reg INC1 College IQ
```

- 回归结果如下：

INC1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
College	5079.415	467.3971	10.87	0.000	4093.293	6065.537
IQ	103.0607	8.068363	12.77	0.000	86.03798	120.0835
_cons	9699.357	624.0679	15.54	0.000	8382.689	11016.03

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 线性回归外推结果如下图：



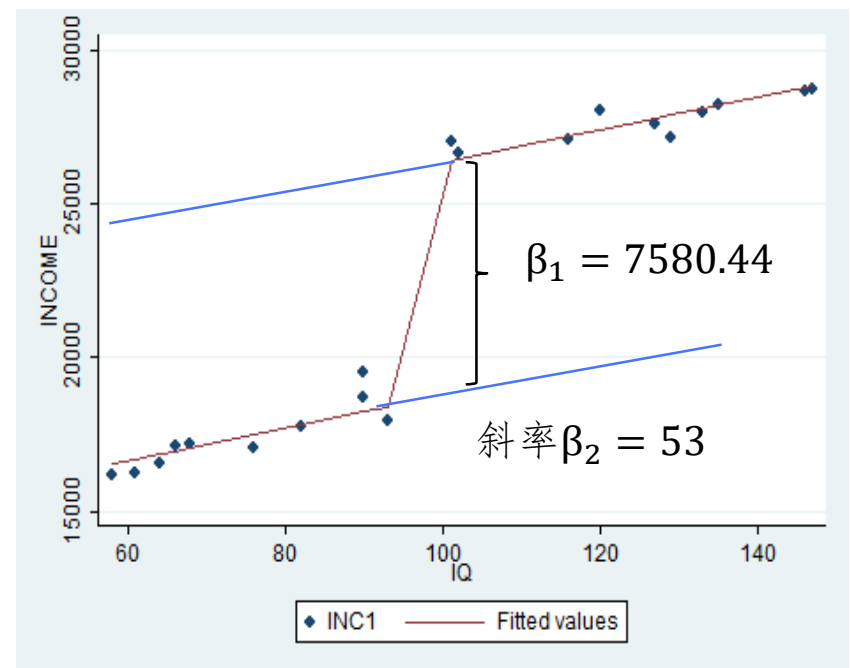
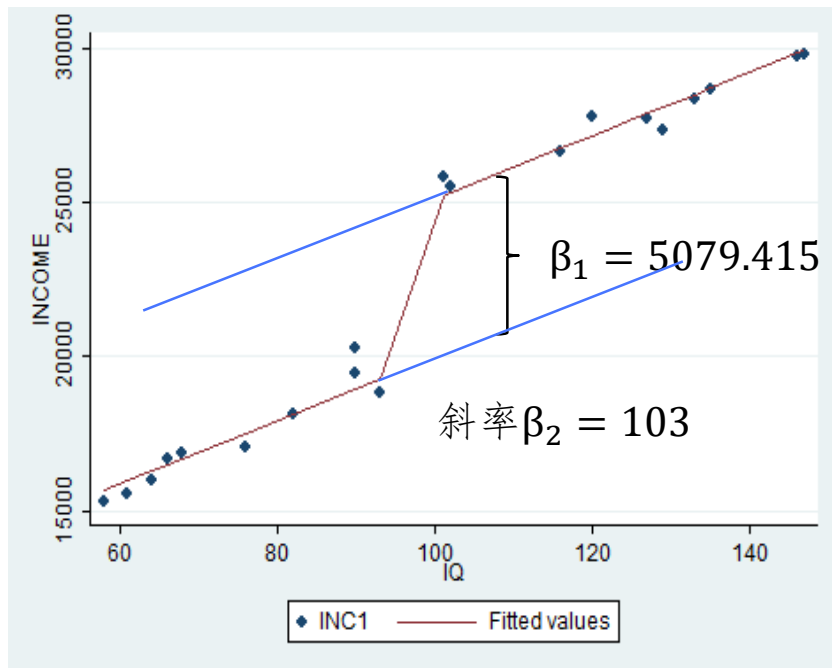
7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 如果真实的反事实的结果如虚线所示，而非简单的线性关系，这种情况下，通过假设的线性函数外推得到的反事实结果就与真实情况相去甚远。
 - 在缺乏共同支撑域情况下，回归得到的处置效应取决于函数关系设置正确与否。
 - 即使关系假设正确，在缺乏重叠并不均衡的情况下，处置变量系数 β_1 的估计值也容易受到控制变量 β_2 的影响，结果较不稳健
- 用一组新的数据INC2再次回归进行验证。

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 用一组新的数据INC2（仅修改INC）再次回归进行验证：

INC1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
College	7580.44	465.9284	16.27	0.000	6597.417	8563.463
IQ	53.04056	8.043009	6.59	0.000	36.07129	70.00982
_cons	13458.17	622.1069	21.63	0.000	12145.64	14770.7



7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 一组具备共同支撑域并且均衡情况下的数据：

ID	INC1	INC2	College	IQ	ID	INC1	INC2	College	IQ
1	18291	18815	0	84	11	23483	24728	1	82
2	19464	18562	0	86	12	23843	25658	1	84
3	18622	18450	0	88	13	24464	24812	1	92
4	19186	18732	0	94	14	24080	25132	1	94
5	18905	20392	0	95	15	24800	25347	1	95
6	18954	18764	0	95	16	25522	23845	1	98
7	19403	18615	0	96	17	25527	23866	1	104
8	20655	20500	0	109	18	25632	25326	1	106
9	20845	19937	0	111	19	25888	25104	1	108
10	21159	20194	0	114	20	26358	25111	1	109

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 在具备共同支撑域并且均衡情况下的回归结果：
 - 用INC1作为被解释变量得到的回归结果如下：

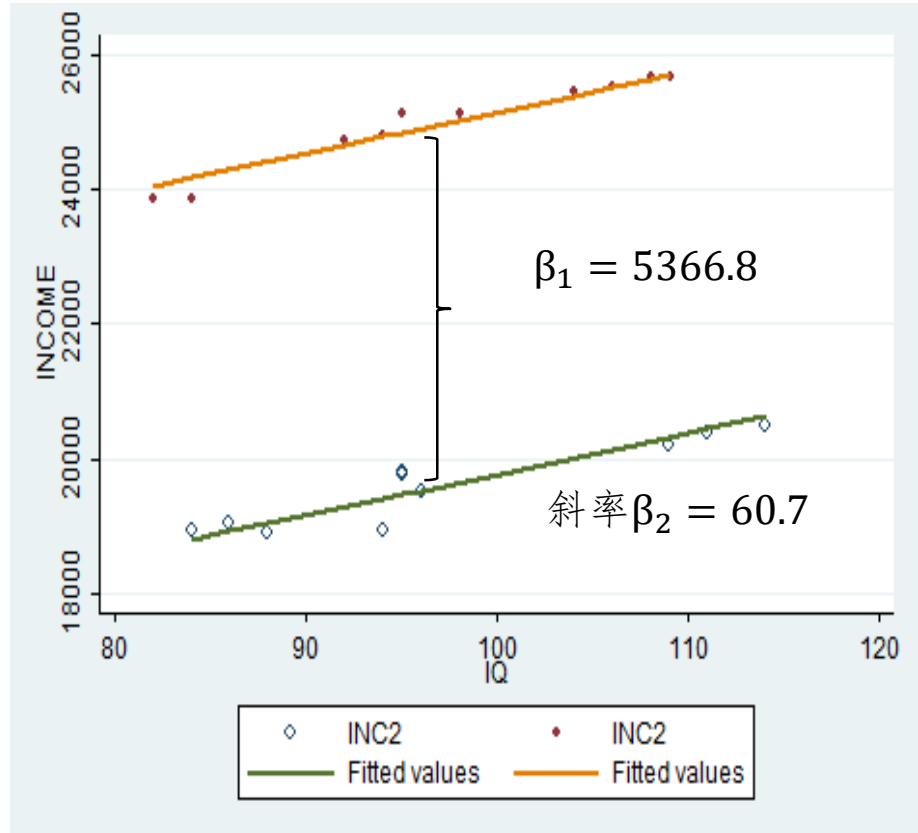
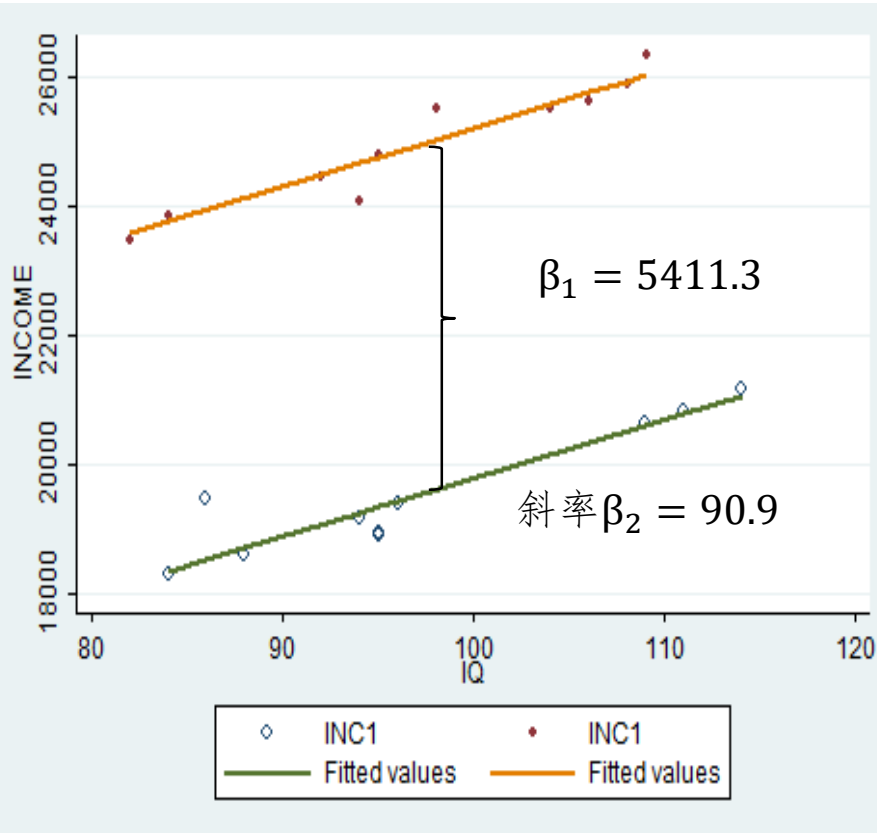
INC1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
College	5411.3	152.7781	35.42	0.000	5088.966	5733.634
IQ	90.94505	7.952881	11.44	0.000	74.16593	107.7242
_cons	10708.54	780.5322	13.72	0.000	9061.762	12355.32

- 用INC2作为被解释变量得到的回归结果如下：

INC2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
College	5366.8	93.81545	57.21	0.000	5168.867	5564.733
IQ	60.73325	4.883572	12.44	0.000	50.42982	71.03669
_cons	13702.83	479.2962	28.59	0.000	12691.6	14714.05

7.2.2 \widehat{ATE} 差异：具体的例子

- 在具备共同支撑域并且均衡情况下的回归结果：



第三节 总结

相同点

- 1.回归方法和匹配方法都是用于处理在估计处置效应中由于可观测变量自选择造成的偏差,它们都不能处理在估计处置效应中由于不可观测变量自选择造成的偏差。
- 2.精确匹配与完全饱和回归模型估计的处置效应是相同的。

不同点

- 1. 匹配法和控制变量饱和回归模型在计算平均处置效应 \widehat{ATE} 上采用不同的比重,对 $\widehat{ATE} (X_i = \mathbf{x})$ 进行加权平均。
- 2. 匹配方法是先将样本根据可观测特征(控制变量)进行匹配, 在观测特征达到均衡的基础上求解处置效应。
匹配方法是两步估计, 它允许我们先对可观测特征进行均衡性检验。因此, 使用匹配方法时应对数据是否满足共同支撑域条件和是否均衡有明确的认识。

不同点

- 3. 非饱和回归模型是将控制变量和处置变量一起纳入模型，一步估计出处置效应，对共同支撑域条件没有要求。非饱和回归模型可以通过假设控制变量和观测结果的线性关系去外推共同支撑域外的“反事实结果”以达到估计处置效应的目的，其结果的合理性取决于方程函数形式是否正确。

不同点

- 4.匹配方法通过同样特征的处置组和控制组的观测结果均值相减得到处置效应。可观测特征X对结果Y的影响通过均值相减消除了，其不需要假设特征X是如何影响结果Y的，因此是非参数方法。回归方法则通过线性函数假设特征变量X是如何影响结果Y的，因此回归方法是参数的估计方法。