

2018 秋季本科时间序列

## 第 5 次作业

提交日期：11 月 16 日

1. 考虑 AR(2) 过程  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ , 自回归系数  $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ 。

(a) 若自回归特征多项式  $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$  的两个零点  $z_1, z_2$  为实数, 且满足  $|z_1|, |z_2| > 1$ , 请推导此时  $\phi_1, \phi_2$  所应满足的限制条件。

(b) 假设  $X_t$  是平稳序列, Yule-Walker 方程为

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 - 1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 & -1 \\ 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) \\ \sigma_X^2(1) \\ \sigma_X^2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

请计算上式左端系数矩阵  $A$  的行列式  $\det A$ , 并判断  $\det A$  是否为 0。

(c) 利用 Cramer 法则, 计算  $A^{-1}$ , 求解  $\sigma_X^2(i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , 并与作业 4 中的附加题结论相对比。

(d) 对  $k \geq 3$ , 你能否给出  $\sigma_X^2(k)$  的递推计算公式?