

2018 秋季本科时间序列

## 第 1 次作业

提交日期：9 月 28 日

1. 考虑定义在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的 2-元分布函数  $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ , 对应的 2-元随机变量为  $(X, Y)$ 。

(a) 对任意的  $x \in (0, 1]$ , 计算 4 个区域

$$A_x = [0, x] \times [0, x],$$

$$B_x = [0, x] \times [x, 1],$$

$$C_x = [x, 1] \times [0, x],$$

$$D_x = [x, 1] \times [x, 1]$$

的概率大小；注意  $A_x \cup B_x$  和  $A_x \cup C_x$  的概率可由分布函数直接得到。

(b) 利用  $\mathbb{P}(D_x)$  的取值, 说明  $(X, Y)$  的概率分布全部集中在  $\{x \in [0, 1], y = 0\}$  和  $\{x = 0, y \in [0, 1]\}$  两条边上。

2. 给定  $X \sim U([0, 1])$ 。

(a) 写出  $X$  的分布函数。

(b) 令  $Y = X$ , 写出  $(X, Y)$  的 2-元联合分布。

(c) 令  $Y = -X$ , 写出  $(X, Y)$  的 2-元联合分布。

3. 假设  $(X, Y)$  为 2-元离散分布,  $p_{ij} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ ,  $i, j = 1, 2$ , 分布 (矩阵) 如下

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\rho & \frac{1}{2}(1-\rho) \\ \frac{1}{2}(1-\rho) & \frac{1}{2}\rho \end{bmatrix},$$

其中  $\rho \in (0, 1)$ 。

(a) 请计算  $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y, \text{var}X, \text{var}Y$ 。

(b) 请计算  $\text{cov}(X, Y)$  与相关系数  $\rho_{XY}$ 。

(c) 当  $X$  的取值为任意的  $x_1 < x_2$ ,  $Y$  的取值为任意的  $y_1 < y_2$  时,  $\rho_{XY}$  等于多少?