武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期

博士生高级微观经济学课程第 3 次作业答案

2017 年 11 月 5 日

1. 预算约束对应

(i). 令 $\lim_n p_n \to \bar{p}, \lim_n x_n \to \bar{x}$ 且 $x_n \in B(p), (\bar{p}, \bar{x}) \in \Delta \times \mathbb{R}_+^2$，根据预算约束定义则有 $p_n x_n \leq p_n e$。由于 $p_n x_n \leq p_n e$ 为内积，且内积具有连续性，则可推知 $\bar{p}\bar{x} \leq \bar{p}e$ 成立，因此 $x \in B(p)$，上半连续对应。

(ii). 在 $\{p_n\} \in \Delta, p_n \to \bar{p} \in \Delta$，某任意 $\bar{x} \in B(\bar{p})$ 的前提下，只需证明序列 $\{x_n\} \in B(p_n)$ 满足 $x_n \to \bar{x}$ 即可证明 $B(p)$ 下半连续。为此，须分情况讨论：

- 假设 $\bar{p}\bar{x} = 0$。因为 $\bar{p}\bar{x}$ 为 $\bar{p}$ 的连续函数，则有 $p_n\bar{x} \to 0$。同时，$\bar{p}e$ 在 Δ 上连续且 $e \gg 0$，则存在 $m \equiv \min_{\bar{p}\in\Delta} \bar{p}e > 0$。因此，可取足够大的 n 使 $p_n\bar{x} < m \leq p_n e$，即 $\bar{x} \in B(p_n)$。那么可找到一个序列 $\{x_n\}$ 当 n 足够大时有 $x = \bar{x}$，使 $B(p)$ 满足下半连续对应。
- 假设 $\bar{p}\bar{x} > 0$。令 $t(p) = \frac{pe}{px}$ 为单纯形价格的标量函数。显然存在 $t^* = t(\bar{p}) \geq 1$，$t(p)$ 在 $\bar{p}$ 处连续，则可以得出 $t_n = t(p_n) \to t(\bar{p})$。同时定义 $x_n = \frac{t_n}{t^*}\bar{x}$，由定义式可知 $p_n x_n = p_n \frac{t_n}{t^*}\bar{x} \leq t(p_n)p_n\bar{x} = p_n e$，则表明 $x_n \in B(p_n)$。并且 $\lim_n x_n = \frac{1}{t^*}\bar{x}\lim_n t_n = x$，$B(p)$ 下半连续对应。

(ii) 示例：取 $e = (1, 0)$，则 $B(p) = \{(x, y) : px + (1-p)y \leq p\}$。分别就 $p = 0, p = 1, 0 < p < 1$ 进行讨论：

- 当 $p = 0$ 时，$B(0) = \{(x, y) : y = 0, x \geq 0\}$；
- 当 $p = 1$ 时，$B(1) = \{(x, y) : y \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$；
- 当 $0 < p < 1$ 时，预算约束为 $B(p) = \{(x, y) : x + \frac{1-p}{p}y \leq 1\}$，故 $x \leq 1$。

现在考虑消费组合 $A = (2, 0)$。易见，$A \in B(0)$，但对任意的 $p > 0$，$A \notin B(p)$，故当 $p_n \to 0$ 时，无法找到 $A_n \in B(p_n)$ 使得 $A_n \to A$。这说明 $B(p)$ 不是下半连续的。

2. 需求函数

a. 构造效用函数 $f\big(U(x)\big)$，并反设其需求对应不为 $D(p)$。取 $x^* = \text{argmax}\, f\big(U(x)\big)$，取 x_0 为 $U(x)$ 的需求对应，进而有 $f\big(U(x^*)\big) > f\big(U(x_0)\big)$。由于 f 严格递增，则存在 $U(x^*) > U(x_0)$。但因为 $x_0 = \text{argmax}_{x\in B(p)} U(x)$ 使 $U(x_0)$ 最大，$U(x^*) > U(x_0)$ 与此矛盾。因此 $f \circ U$ 的需求对应仍为 $D(p)$。

b. 依照题意构建拉格朗日函数

$$L = U(x) = \lambda(w - p \cdot x)$$

分别对 x_1 至 x_K 以及 λ 求导，并将拉格朗日函数对 x 的偏导用 $\partial L/\partial x_i$ 的形式表示，得到

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \alpha_i \frac{U(x)}{x_i} - \lambda p_i = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w \sum_{j=1}^{K} p_j x_j = 0 \tag{2}$$

将拉格朗日函数对 x_1 至于 x_K 的偏导结果带入式 (2)，根据 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_K = 1$ 的条件可得到

$$\sum_{j=1}^{K} p_j \frac{\alpha_j U(x)}{\lambda p_j} = \frac{1}{\lambda} U(x) = w \Rightarrow U(x) = \lambda w \tag{3}$$

将式 (3) 结果带入式 (1) 得到 $x_i = \frac{\alpha_1 w}{p_i}$ 即为马歇尔需求函数的解。

c. 此问中，提干舍去了 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_K=1$ 的条件，结合 a、b 两问的结论，下面依次求解

(i). 因为 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_K\neq 1$ 则根据式 (3) 有

$$\sum_{j=1}^{K} p_j \frac{\alpha_j U(x)}{\lambda p_j} = w \Rightarrow U(x) = \frac{\lambda w}{\sum \alpha_j}$$

则最终马歇尔需求函数的解变为 $x_i=\frac{\alpha_i w}{p_i\sum\alpha_j}$。

(ii). 令此问的需求函数为 f，则 $f=\ln U(x)$，严格递增。根据 a 问结论可推知此问的计算结果与 (i) 中结果无异，因此马歇尔需求函数的解为 $x_i=\frac{\alpha_i w}{p_i\sum\alpha_j}$。

d. 构建拉式函数

$$L=\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t\log c_t+\lambda(w-\sum_{t=1}^{\infty}p_tc_t)$$

则有

$$\frac{\partial L}{\partial c_i}=\beta^i\frac{1}{c_i}+\lambda p_i=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=w-\sum_{t=1}^{\infty}p_tc_t=0 \tag{5}$$

将 (4) 代入 (5)，得到

$$\lambda=\frac{w}{\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t} \tag{6}$$

将 (6) 代入 (4) 得到 $c_t=\frac{\beta^{t+1}}{w(1-\beta)p_t}$。

e. 设 $(\frac{1}{n},0),(0,1)$ 为集合 X 中的元素，由字典序偏好可确定偏序关系为 $(\frac{1}{n},0)\succsim(0,1)$。要说明字典序不连续，只需说明元素的极限不再满足偏序关系或 $\{X:(\frac{1}{n},0)\succsim(0,1)\}$ 不为闭集。通过求极限，有 $\lim_n(\frac{1}{n},0)\to(0,0)\prec(0,1)$，因此字典序偏好不连续。字典序偏好下消费者总是偏好更多的 x 商品，因此对应的 Marshallian 需求函数为 $D(p,w)=(x(p,w),y(p,w))=(w/p,0)$，其中 p 表示 x 商品的价格。

3. 竞争均衡的福利性质

a. 证明：反设一个竞争均衡 $\langle p,x\rangle$ 中的配置 x 不为 Pareto 最优配置，则存在可行配置 x' Pareto 优于 x。这意味着对于任意家庭 h 而言 $U^h(x'_h)\geq U^h(x_h)$；故必有 $p\cdot x'_h\geq p\cdot x_h$，否则可以选择 ϵ 足够小，使得 $p\cdot(x'_h+(\epsilon,\ldots,\epsilon))\leq p\cdot x_h=p\cdot e_h$，且 $U^h(x'_h+(\epsilon,\ldots,\epsilon))>U^h(x_h)$，与 x_h 在预算集内实现效用最大化相矛盾。进一步的，存在一个家庭，不妨设为 $h=1$，满足 $U^1(x'_1)>U^h(x_1)$；故必有 $p\cdot x'_1>p\cdot x_1$，否则又与 x_1 在预算约束集内实现效用最大化矛盾。两者结合可知 $\sum_h p\cdot x'_h>\sum_h p\cdot x_h=\sum_h p\cdot e_h$。而家庭消费受禀赋限制 $\sum_h p\cdot x'_h\leq\sum_h p\cdot e_h$，与前述矛盾。因此 $\mathscr{E}$ 中的任意一个竞争均衡配置都为 Pareto 最优配置。

b. 证明：这里需要注意的是社会禀赋变为 $p\cdot e^h+\sum_{j\in J}\theta_j^h p\cdot y^j$，其余证明与 a 问一致。