武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期

博士生高级微观经济学课程第 2 次作业答案

2017 年 11 月 5 日

1. 凸集的性质

 a. 由 Y 非空，任取 $x, y \in Y$ 以及 $\alpha \in [0,1]$。由 $Y = \cap_i X_i$ 知，对任意 i，$x, y \in X_i$；而 X_i 为凸集，故 $\alpha x + (1-\alpha)y \in X_i$。因此 $\alpha x + (1-\alpha)y \in Y$，即 Y 为凸集。

 b. 任取 $z_1, z_2 \in A+B$，$\alpha \in [0,1]$。将 z_i 写为 $x_i + y_i$，$x_i \in A$，$y_i \in B$。由 A, B 为凸集，且

$$\begin{aligned}\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 &= \alpha(x_1+y_1) + (1-\alpha)(x_2+y_2) \\ &= \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 + \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2,\end{aligned}$$

 可知 $\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 \in A+B$。

 c. 先证有界。由于 A, B 均为有界集，故存在 $M > 0$ 满足 $||x||, ||y|| < M$，$\forall x \in A,\ y \in B$。由于任意 $z \in A+B$ 可写为 $z = x+y$，故 $||z|| \leq ||x|| + ||y|| < 2M$。下面证明 $A+B$ 为闭集。假设 $A+B$ 中有收敛点列 $z_n = x_n + y_n \to z$ 且 $\{x_n\} \subset A, \{y_n\} \subset B$；需证 $z \in A+B$。由于 A 是紧集，$\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n(k)}\}$，并记其极限为 $x \in A$。再考虑指标集 $\{n(k)\}$ 对应的 $\{y_n\}$ 之子序列 $\{y_{n(k)}\}$。由 B 为紧集，可知 $\{y_{n(k)}\}$ 存在收敛子列 $\{y_{n(k(m))}\}$，并记其极限为 $y \in B$。易见，$\{x_{n(k)}\}$ 的子序列 $\{x_{n(k(m))}\}$ 也收敛到 x。同时，$\{x_{n(k(m))} + y_{n(k(m))}\}$ 为收敛列，且为 $\{x_n + y_n\}$ 的子序列，故极限相同为 z。因此

$$x + y = \lim_{m\to\infty} x_{n(k(m))} + \lim_{m\to\infty} y_{n(k(m))} = \lim_{m\to\infty}(x_{n(k(m))} + x_{n(k(m))}) = z,$$

 即 $z \in A+B$。

 d. 直接按定义可验证 A, B 为闭集。下面说明 $A+B$ 不是闭集。事实上，$A+B = C \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$，即不包括 y-轴的半平面。为说明此事实，首先任取 C 中一点 (x_0, y_0)。当 $y_0 \geq 0$ 时，令 $y^+ = 1/x_0 + y_0$，$y^- = -1/x_0$；当 $y_0 < 0$ 时，令 $y^+ = 1/x_0$，$y^- = -1/x_0 + y_0$。显然有 $y^+ + y^- = y_0$，故 $(x_0, y_0) = (x_0, y^+) + (x_0, y^-)$，且 $(x_0, y^+) \in A$，$(x_0, y^-) \in B$。由此知 $C \subset A+B$。另一方面，A, B 中所有点的横坐标均大于 0，故其和的横坐标也大于 0，即 $A+B \subset C$。

2. 凹函数的连续性

 a. 先证 $[f(v)-f(x)]\frac{y-x}{v-x} \leq f(y)-f(x) \leq [f(x)-f(u)]\frac{y-x}{x-u}, u < x < y < v$。因为 $v - x > y - x$ ，则可令 $\frac{y-x}{v-x} = \alpha \in (0,1)$，因此有

$$\begin{aligned}y = \frac{y-x}{v-x}v + \big(1 - \frac{y-x}{v-x}\big)x &\Rightarrow y = \alpha v + (1-\alpha)x \\ &\Rightarrow \alpha f(v) + (1-\alpha)f(x) \leq f\big(\alpha v + (1-\alpha)x\big) = f(y) \\ &\Rightarrow [f(v)-f(x)]\frac{y-x}{v-x} \leq f(y) - f(x)\end{aligned}$$

 又因为 $y - u > x - u$ ，令 $\frac{x-u}{y-u} = \beta \in (0,1)$ ，则有

$$\begin{aligned}x = \frac{x-u}{y-u}y + \big(1 - \frac{x-u}{y-u}\big)u &\Rightarrow x = \beta y + (1-\beta)x \\ &\Rightarrow \beta f(y) + (1-\beta)f(u) \leq f(x) \\ &\Rightarrow \beta\big(f(y)-f(x)\big) \leq \big(1-\beta\big)f(x) - \big(1-\beta\big)f(u) \\ &\Rightarrow f(y)-f(x) \leq [f(x)-f(y)]\frac{1-\beta}{\beta} = [f(x)-f(y)]\frac{y-x}{x-u}\end{aligned}$$

同理可证下个不等式。同时，可验证题干中 $\lim_{y\to x^+} f = \lim_{y\to x^-} f = 0$ ，因此 f 在 x 处连续。

b. 根据 Kreps (2013) Proposition A3.17-g ：*如果函数 f 为凹 (或凸)，那么 f 在其定义域内部连续。*仿照命题，证明如下：

- 设定：由于 x 在 D 内部，对于开球的半径 $\epsilon > 0$ 存在满足 $\|y_i - x\| < \epsilon$ 在 D 之中，其中 $i = 1, 2$ 。假设有向量 e^i ，性质满足第 i 个分量为 ϵ ，其余为 0 。
- 下半连续：考虑存在序列 y^n 使 $\|y_i^n - x\| < \epsilon/2$ ，并将 $\{y_i^n\}$ 转化为与 $0, e^i, e^{-i}$ 的凸组合。为此，需要借助符号函数：定义 $y_i^n \geq 0$ 时，$\mathrm{sgn}(y_i^n) = +1$ ，反之 $\mathrm{sgn}(y_i^n) = -1$ 。于是，凸组合可写为
$$y^n = \sum_{i=1}^{2} \|y_i^n - x\| \Big(\mathrm{sgn}(y_i^n) e^i\Big) + \Big(1 - \sum_{i=1}^{2} \|y_i^n - x\|\Big) x$$
由于 $\|y_i^n - x\| < \epsilon/2$ ，上述表达式为凸组合。又由于 f 为凹，则进一步有
$$f(y^n) \geq \sum_{i=1}^{2} \|y_i^n - x\| f\Big(\mathrm{sgn}(y_i^n) e^i\Big) + \Big(1 - \sum_{i=1}^{2} \|y_i^n - x\|\Big) f(x)$$
上述表达式有界，令 $\lim_n y^n \to x$ 时 $f(x) \leq \liminf_n f(y^n)$ ，说明 f 下半连续。
- 上半连续：为证明上半连続，需将 x 写为 y^n, e^i, e^{-i} 的凸组合，具体为
$$x = \sum_{i=1}^{2} \frac{\|y_i^n - x\|}{1 + \sum_{i=1}^{2} \|y^n - x\|} \Big(\mathrm{sgn}(-y_i^n) e^i\Big) + \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{2} \|y^n - x\|} y^n$$
由于 f 为凹函数，则有
$$f(x) \geq \sum_{i=1}^{2} \frac{\|y_i^n - x\|}{1 + \sum_{i=1}^{2} \|y_i^n - x\|} f\Big(\mathrm{sgn}(-y_i^n) e^i\Big) + \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{2} \|y_i^n - x\|} f(y^n)$$
当 $\lim_n y^n \to x$ 时，$f(x) \geq \limsup_n f(y^n)$ ，f 上半连续。

3. *凹函数的极值性质*

(i). 反设 x_0 虽为局部极大值，而非最大值。假设存在最大值为 z ，且取 x_0 附近一点 y 使其满足 $x_0 < y < z$ ，则存在 $f(z) > f(x_0) > f(y)$ 。根据凹函数的性质，必有 $\alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(z) \leq f(y), \alpha \in [0, 1]$ 。现在不妨设 $\alpha = 1/2$ ，不等式变为 $\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(z) \leq f(y)$ ，由 $f(z) > f(x_0)$ 可推知 $f(x_0) < f(y)$，与 $f(x_0) > f(y)$ 矛盾。因此 x_0 为最大值。

(ii). 反设最大点不唯一，则令 $x_1 \in D$ 满足 $f(x_1) = f(x_0)$ 。由于函数严格凹，则有 $\alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_1) < f(\alpha x_0 + (1-\alpha) x_1) \Rightarrow f(x_0) < f(\alpha x_0 + (1-\alpha) x_1) = f(x')$，其中 $x' = \alpha x_0 + (1-\alpha) x_1$。由此可见 x_0 不为最大值，与题设矛盾。

4. *多元函数可微性*

首先说明该函数不连续。令 $x = ky^2$，则
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{ky^4}{k^2 y^4 + y^4} = \frac{1}{k}$$
由于 k 任意，故 $f(x, y)$ 不连续，则其导数不存在，因此 f_x, f_y 在 $(0, 0)$ 不连续。
其次说明偏导数各个方向都存在。对 f 求偏导得到
$$f_x = \frac{y^2(x^2 + y^4) - 2x^3 y^2}{(x^2 + y^4)^2}, \qquad f_y = \frac{2xy(x^2 + y^4) - 4xy^5}{(x^2 + y^4)^2}$$
再令 $y = kx$，得到 $\lim_{x\to 0} f_x = k^2, \lim_{x\to 0} f_y = 2k$。因为 k 任意，故 $(0, 0)$ 各方向偏导数存在。

5. 二阶导数交换次序

首先说明函数与其导数的连续性。因为 $f_{(x=0,y\to 0)} = f_{(x\to 0,y=0)} = 0$，且沿任何方向逼近都为 0 (可考察 $y=\sqrt{x}, y=x, y=x^2$ 几类情况)，故函数连续。同时，f_x, f_y 为

$$f_x = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{x^4+2x^2y^2+y^4}, \qquad f_y = \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}$$

同理，f_x, f_y 也可以如上验证，可知两类偏导沿任何方向逼近都为 0，故连续。
其次，为回答 c 与 d 只需说明二阶偏导不连续。由于二阶偏导性质存在 $f_{xy} = f_{yx}$，则

$$f_{yx} = f_{xy} \equiv \frac{(5x^4 - y^4 - 12x^2y^2)(x^2+y^2)^2 - (x^5 - xy^4 - 4x^3y^2)4x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

令 $y = kx$ 后可知分子分母皆为 8 次幂，则有 $\lim_{x\to 0} f_{yx} = \lim_{x\to 0} f_{xy} = g(k)$，$g(k)$ 为 k 的函数且 k 任意，故极限不存在，则 f_{xy}, f_{yx} 不连续，故 $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$。

6. 凹性与二阶导数

a. 海塞矩阵形式如下：

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

则判断正负定情况只需看顺序主子式的符号即可。计算可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\alpha x^{-\epsilon}}{\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}} f(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{\alpha(1-\alpha)\epsilon x^{-1-\epsilon}y^{1-\epsilon}}{[\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}]^2} f(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{\alpha(1-\alpha)\epsilon x^{1-\epsilon}y^{-1-\epsilon}}{[\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}]^2} f(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\alpha(1-\alpha)\epsilon x^{-\epsilon}y^{-\epsilon}}{[\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}]^2} f(x,y). \end{aligned}$$

可见 H 的一阶顺序主子式 $\partial^2 f/\partial x^2 < 0$ 而二阶顺序主子式，即 $\det H$，等于

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

故 f 是凹函数，但**并非严格凹**。

b. 此例为 D-S 函数向 C-D 函数转化的示例，具体计算过程如下

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 1} f(x,y) &= \lim_{\epsilon\to 1} [\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}]^{1/(1-\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 1} \exp\left\{ \ln[\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}]^{1/(1-\epsilon)} \right\} \\ &= \exp\left\{ \lim_{\epsilon\to 1} \ln[\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}]^{1/(1-\epsilon)} \right\} \qquad \text{（由函数的连续性）} \end{aligned}$$

而由 l'Hospital 法则可知：

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 1} \frac{\ln[\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}]}{1-\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 1} \frac{\alpha x^{1-\epsilon}\ln x + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}\ln y}{\alpha x^{1-\epsilon} + (1-\alpha)y^{1-\epsilon}} \\ &= \alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y = \ln x^\alpha y^{1-\alpha} \end{aligned}$$

所以，$\lim_{\varepsilon\to 1} f(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ 。