武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期
博士生高级微观经济学课程第 1 次作业答案

2017 年 11 月 5 日

1. 欧式模

- Cauchy-Schwartz 不等式的证明

  证明：构建向量 $x\|y\|, \|x\|y$ ，令二者相减 $x\|y\| - \|x\|y$ ，则有

$$\begin{aligned}\big(x\|y\| - \|x\|y\big) \cdot \big(x\|y\| - \|x\|y\big) =& \|x\|^2\big(y \cdot y\big) + \|y\|^2\big(x \cdot x\big) - 2\|x\|\|y\|\big(x \cdot y\big)\\ =& 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\big(x \cdot y\big) \geq 0\end{aligned}$$

  则由式 (1) 可得 $\|x\|^2\|y\|^2 \geq \|x\|\|y\|\big(x \cdot y\big) \Longrightarrow \|x\|\|y\| \geq x \cdot y$ 。

- 三角不等式的性质

  证明：由模的性质可得

$$\|x+y\|^2 = \big(x+y\big) \cdot \big(x+y\big) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot x \cdot y$$

  由式 (2) 与 Cauchy-Schwartz 不等式可知

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot x \cdot y \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2$$

  开方后即 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

2. 集合的交与并

   a. 证明：因为 $X_n \subset \mathbb{R}^k$ ， $n = 1, \cdots, \infty$ ，为开集，则对于 X_i 中任意一点 x_i 存在 $\varepsilon_i > 0$ ，使开球 $B\big(x_i, \varepsilon_i\big) \subset X_i$ 。而当 $Y = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ 之后，x_i 的性质没有改变。则在 Y 中，对于 x_i 仍然有开球 $B\big(x_i, \varepsilon_i\big) \subset Y$ (因为 x_i 是 Y 的内点)，因此开集的并还为开集。

   b. 证明：取 X_1, X_2 示例，因为 X_1, X_2 都为闭集，根据集合的性质可以知道 $\big(X_1 \cap X_2\big)^c = X_1^c \cup X_2^c$ ，即交集的补集等价于补集相并。由 1 的证明知 X_1^c, X_2^c 为开集，则 $X_1^c \cup X_2^c$ 也为开集，那么相应 $\big(X_1 \cap X_2\big)^c$ 为开集，进而 $X_1 \cap X_2$ 为闭集。将此示例拓展到 X_n 后即可证明该题。

   c. (i) 令 $X_n = (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，则有 $\cap_n X_n = \{1\}$，为 $\mathbb{R}$ 中的闭集。(ii) 令 $X_n = [1 - 1/2^{n-1}, 1 - 1/2^n] \subset \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，则有 $\cup_n X_n = [0, 1)$，不是闭集。

3. 闭集的性质

证明：

- 充分性：已知 X 为闭集，且 $\{x_n\} \subset X$ 为一收敛点列，极限为 x。下证 $x \in X$。反设 $x \notin X$，则 $x \in X^c$ 且该集合为开集，故存在 $\epsilon > 0$ 使得 $B(x, \epsilon) \subset X^c$。这意味着 $\{x_n\} \subset X$ 与 x 的距离至少为 ϵ，与收敛矛盾。

- 必要性：已知对 X 中任意收敛点列 $\{x_n\}$，其极限 $x \in X$。下证 X 为闭集。为此，只需证明 X^c 为开集。反设 X^c 不是开集，则存在某点 $y \in X^c$，满足对任意的 $\epsilon > 0$，$B(y, \epsilon)$ 均不完全包含于 X^c 中，即 $B(y, \epsilon) \cap X \neq \varnothing$。若如此，对 $\epsilon = 1/n$，$n = 1, 2, \ldots$ 依次取点 $y_n \in B(y, 1/n) \cap X$。点列 $\{y_n\} \subset X$，且收敛于 y，故 $y \in X$。与 $y \in X^c$ 的假设矛盾。

4. 紧集的性质

a. 证明：反设 X 无界，则其点列 $\{x_n\}$ 可有 $\|x_n\| > n$，故其子列 $\{x_{nk}\}$ 存在 $\|x_{nk}\| > nk$。进一步，根据题意有 $\lim_{k\to\infty} x_{nk} \equiv a < \lim_{k\to\infty} nk$，与反设矛盾。因此 X 有界。反设 X 为开，则存在 $x_n : \lim_{n\to\infty} x_n = a \notin X$，与题意矛盾。因此 X 为闭。结合上述性质，X 为紧集。

b. 证明：因为 $C = [0,1]/[(1/3,2/3) \cup (1/9,2/9) \cup (7/9,8/9) \cup \cdots]$，由 2.a 的证明知 C 为闭集的交，则进一步由 2.b 的证明知 C 为闭集。又因为 C 有界，故 C 为紧集。