

经济学与数学

刘 岩

武汉大学经管学院金融系

ulysses1906@163.com

www.liuyanecon.com

2018 年 7 月 2 日

说明

个人简介

- 2005 年考入北大数院本科
- 2006 年开始在中国经济研究中心 (CCER) 念经济学双学位
- 2009 年赴纽约州立大学石溪分校 (Stony Brook University) 念经济学博士
- 2014 年博士毕业, 在武大经管院工作至今
- 主要研究领域: 宏观经济学, 商业银行与金融中介

说明

个人简介

- 2005 年考入北大数院本科
- 2006 年开始在中国经济研究中心 (CCER) 念经济学双学位
- 2009 年赴纽约州立大学石溪分校 (Stony Brook University) 念经济学博士
- 2014 年博士毕业, 在武大经管院工作至今
- 主要研究领域: 宏观经济学, 商业银行与金融中介

假设

- A 以下所有讨论均基于我个人的经验与体会
- B 听众致力于从事现代经济学研究

本讲内容

- ① 绪论
- ② 经济学中数学的现状
- ③ 经济学中数学的历史
- ④ 经济学中数学的学习
- ⑤ 结语

本节内容

- 1 绪论
 - 学科内涵
 - 区别和联系
 - 数学的意义
- 2 经济学中数学的现状
- 3 经济学中数学的历史
- 4 经济学中数学的学习
- 5 结语

什么是经济学

Lionel Robbins, *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science*, 1935, p. 15

Economics is the science which studies human behavior as a relationship between ends and scarce means which have alternative uses.

- 4 要素：科学，人的行为，资源，利益
- 经济学是研究人进行资源配置以使利益最大化的科学

什么是科学

- 科学是关于客观世界且具有逻辑结构的知识体系
 - 自然科学，社会科学
- 科学的方法：归纳法 (induction)，演绎法 (deduction)
- 科学知识的逻辑结构：**理论**；从“因”到“果”的逻辑联系；从一系列基础假设、原理出发，通过逻辑推理，得到一系列结论或预测，并可以与现实相对照；总具有抽象性
- 科学理论的本质特征：Karl Popper 可证伪性 (falsifiability)

经济学与数学的区别

- 数学是关于数量、空间等对象 (object) 及其关联的纯粹逻辑体系
- 数学并不存在用客观现实证伪的问题
 - G. H. Hardy: 纯粹数学是没有任何现实用途的
 - 科学史无数例子说明, 纯粹数学的结论可以在现在或者遥远的将来产生巨大的实际作用
- 在 Karl Popper 的意义上, 数学不是科学

经济学与数学的联系

- 经济学的知识本身，源于现实，也关于现实
- 经济学知识的逻辑结构，可以用数学来表达
- 从现实出发，抽象出理论的基本原理、假设；通过数学的推理，得到逻辑上前后一致的结论、预测；再将理论推理的结果与现实相对比，或者用现实来检验，以此回到现实
- 数学化逻辑体系的建立，是一个学科科学性的反映
- 经济学是一门理论科学；现代经济学具有高度科学性

为什么要用数学

- 经济学研究的问题：人的行为与资源的配置
- 在具体问题中，问题转化为经济变量之间的关系 \Rightarrow 内生变量的决定以及内生变量对外生变量的依赖
- 实证经济学：用现实来检验经济变量间的关系
- 理论经济学：理解经济变量间关系的**内在机制**
 - 经济理论的要素：界定环境，明确行为主体选择，规定交互作用方式，通过逻辑推理得到结论；**理论即模型**
- 数学提供了简单、有效的逻辑推理方法

文字模型与数学模型

- 数学是一种语言；严格、精确的形式逻辑系统
- 所有的数学符号都能被完整的转换为文字语言；后者说，所有数学的推理，都可以等价的使用文字推理来完成
- 但数学的优势在于，提供了一种低成本、精确的推理语言
 - 精确文字推理的范本：Jacob Viner, *Studies in the Theory of International Trade*
 - 混乱文字推理的范本：John M. Keynes, *The General Theory*
 - 文字推理制造了无数经济学史上的争论：Monetarist Controversy; Cambridge Capital Controversy; Coase Theorem; 哈弗亚裔招生歧视案

本节内容

- 1 绪论
- 2 经济学中数学的现状
 - 分类及现状
 - 趋势：量化分析
- 3 经济学中数学的历史
- 4 经济学中数学的学习
- 5 结语

经济学的分类

按学科大类分：微观，宏观，计量

- ① 微观经济学：家庭、企业、政府等单个或者单类主体的最优决策、策略互动问题
- ② 宏观经济学：包含家庭、企业等各类经济主体的一般均衡（加总数量与价格、分配）问题

⇒ “均衡”概念是微观、宏观经济学共同的核心

- ③ 计量经济学：处理经验事实与经济理论的关联问题

按方法论分

- ① 理论经济学：在恰当抽象的理论假设下，进行理论推理
 - 与国内常用的“理论经济学”一词有区别
- ② 实证经济学：用经验事实对理论预测进行检验

数学的全面应用

- 翻开任何一本顶尖经济学期刊，几乎没有有一篇文章完全不使用数学
- 即便是一篇纯粹实证的文章，其每一个实证方法，都是数学方法
 - OLS 回归也是数学！
 - 经济学期刊基本不发表案例研究
- 北美、欧洲以及国内顶尖学校的经济、金融博士项目，第一年与“三高”（高微、高宏、高计）同时上或者提前上专门的数学课（内容一般比较初级）

目前经济学主要使用的数学工具

- 基本工具：微积分、线性代数、初等概率论
- 微观：实分析、测度论、凸优化、点集拓扑、不动点理论
- 宏观：随机过程（连续或离散时间，包括时间序列）、动态最优化、动态规划、变分法、泛函分析
 - 动态最优化：离散时间最优化的一般方法
 - 动态规划：含有递归结构的动态最优化
 - 变分法：连续时间最优化；随机情形下称为随机最优化
- 计量：实分析、测度论、泛函分析、复分析、矩阵论、高等概率论、随机过程、随机模拟
- 更深的数学理论：Kohlberg & Mertens (1986 *Econometrica*), 博弈论的核心问题（均衡选择），本质性的使用了代数几何、微分拓扑的数学工具

理论与实证的深度融合：量化模型

结构化建模与估计 (structural modeling and estimation)

- 微观领域：structural industrial organization (动态、不完全竞争模型；异质性消费者、厂商下的不完全竞争模型)，structural labor (家庭劳动供给、储蓄、生育等行为的动态模型)，structural corporate finance (动态、有约束的厂商投融资模型)
- 宏观领域：更准确的微观基础，如 DSGE、不完全市场下的量化宏观模型、连续时间金融模型
- 主要的计量方法：simulated method of moments (SMM)，Bayes 方法 (MCMC 模拟)

关键在于模型的量化求解、估计与模拟

大数据与机器学习：量化方法

- 更大的数据量与更高的计算速度
- 利用机器学习算法来挖掘数据中隐藏的模式与关联
 - 算法交易：从数据中实时识别套利机会，通过计算机程序实现套利利润
 - 广告智能推送
 - 市场监管与预警
- 机器学习未来可能对实证经济学有重要的推动作用
- 机器学习中的数学：计算机（算法的本质是数学推理）、统计、数值最优化

网络结构与系统性风险：非传统数据的量化分析

- 传统的实证经济学对数据样本（经济个体）间的关联采取简化处理
 - 不考虑数据间的横向关联，或者简化为特定相关系数模式
- 但经济主体间的直接关联具有重要的经济意义：金融机构间的投资、融资头寸是系统性风险（systemic risk）的源头
- 其他网络结构：企业投入-产出关系；股权及控制权结构
- 经济对象间网络结构的复原与分析需要全新的数学工具：非结构化数据的挖掘与比对（离散数学），网络流的计算（图论），如企业控制权的还原

本节内容

- 1 绪论
- 2 经济学中数学的现状
- 3 经济学中数学的历史**
 - 分析方法的数学化
 - 理论体系的数学化
- 4 经济学中数学的学习
- 5 结语

经济学：分析方法的数学化

- 19 世纪：Edgeworth, Cournot, Bertrand, Walras, ...
用函数研究经济变量之间的关系；用方程来研究内生变量的决定
- 20 世纪初，Marshall, Keynes, Hicks：初等的图形和代数方法；Ramsey：最优化方法的初次应用（最优税收与增长）
- Schumpeter: 经济现象天生适合量化研究
- Samuelson: *Foundations of Economic Analysis*, 1947, 首次系统阐释和应用数学分析方法

古典经济学 \Rightarrow 边际革命 \Rightarrow 新古典经济学

- 古典经济学 (classical economics) 从 18 世纪末 Adam Smith, 经过 19 世纪初 David Richardo, 到 19 世纪中叶 John S. Mill, 提出了一套基本的经济学概念, 如生产、分配、需求、供给、价值、效用、利润、成本等
- 但始终面对一个基本的逻辑困境: 商品价值的度量
 - 劳动价值, 使用价值, 交换价值
- 边际定价理论的核心在于分析消费者、厂商的边际决策 (marginal choice) ——数学上对应着一阶导——从而得出对任意商品的需求与供给曲线
- Marshall 是需求、供给曲线局部均衡 (partial equilibrium) 分析的集大成者
- 一个相对完整的经济学理论核心——新古典经济学 (neoclassical economics) ——已现雏形

新古典经济学体系的建立

- Hicks、Samuelson 分别奠定了新古典经济学的一般均衡 (general equilibrium) 概念框架和局部均衡的数学框架
- 仍然缺乏完整、严谨的一般均衡数学框架
- 这一缺陷的最终完善，要等到 Arrow-Debreu-McKenzie-Radner 一般均衡理论的建立
- 其中的标志性胜利是 1954 年 Arrow & Debreu 在 *Econometrica* 上发表的首个一般均衡存在定理，以及 Debreu 1959 年 *Theory of Value* 的出版
 - McKenzie 与 AD 同一时期证明了一般均衡存在性的结果，但发表晚了几年
 - Debreu (1959) 奠定了公理化一般均衡理论基础，但直到 70 年代初，Radner 才完全给出了动态一般均衡理论的数学框架

Arrow-Debreu-McKenzie-Radner 一般均衡理论

- 贡献
 - ① 清晰的界定了市场交易机制
 - ② 明确了竞争均衡存在性的成立条件——**科学理论所必须的逻辑一致性**——及均衡配置的 Pareto 最优性
 - ③ 极大推动了数学方法的应用：不动点定理
- 特别是对动态、不确定环境下市场交易和均衡概念的发展，奠定了“理性预期”宏观经济学的基础，使得对动态经济现象的精确研究称为可能

不动点定理、博弈论与一般均衡理论

- Arrow & Debreu 对一般均衡存在性的证明建立在 Nash (1950 *PINAS*) 提出的非合作博弈均衡概念及存在性证明基础上
 - 这就是日后大名鼎鼎的 Nash 均衡
- Nash 对 Nash 均衡的存在性证明, 又是建立在 Kakutani (1941) 证明的一个不动点定理之上
- 同时, Nash 均衡也是 1970 年代开始的微观经济理论现代化发展的基础
- 现代宏观经济学和微观经济学有着完全一致的数学基础

理性预期理论与宏观经济政策

- 从 Keynes 开始，“预期”就是宏观经济理论的一个中心
- 在一般均衡理论基础上形成的理性预期理论为“预期”的研究提供了一个简单、有效、自洽的框架
- Lucas (1972): 利用动态一般均衡框架下的理性预期特征，首次严格论证货币政策的“中性”问题
- Lucas 批判 (1976): 宏观经济政策要考虑政策变动对“预期”的影响；若否，理性预期可能完全抵消经济政策的作用
- Kydland & Prescott (1977) 进一步指出宏观经济政策的时间不一致性；Barro & Gorton (1983): 货币政策规则优于相机抉择的政策制定传统
 - Friedman (1968) 已有文字讨论：“惊人”的预测了 70 年代高通胀问题

1980 年代及之后经济理论的发展

- 宏观经济学：80 年代 RBC 模型，90 年代 New Keynesian 模型、异质性个体模型、BGG 金融加速器模型……；高度数学化、强调微观基础的一般均衡模型
 - 递归方法 (recursive methods)：动态模型量化求解的最重要方法；**随机动态规划**
- 微观经济学：70 年代开始，建立在博弈论基础上的信息经济学、合约理论等新一代的微观经济理论全面发展；数学模型已经成为标准语言
- 计量经济学：Engel、Granger 在经济、金融时间序列分析方面的很多工作 (co-integration, ARCH/GARCH)，反过来极大促进了统计理论的发展；同时，计量经济学也在大量借用统计学发展出来的随机模拟方法 (bootstrap, MCMC)

本节内容

- ① 绪论
- ② 经济学中数学的现状
- ③ 经济学中数学的历史
- ④ 经济学中数学的学习
 - 知识体系
 - 方法与资料
- ⑤ 结语

基础知识体系

- 核心：微积分、线性代数、概率论
 - 微积分是所有最优化分析的基础
 - 线性代数是所有数值计算的基础
 - 概率论是所有不确定性分析的基础
- 最优化：凸优化、动态最优化（Lagrangian 方法）、随机动态规划（dynamic programming）/递归方法、随机最优控制（stochastic optimal control, 连续时间用）
- 随机过程：马氏链、平稳过程、布朗运动
- 数值计算：数值线性代数、数值分析、Matlab/Python 编程

更进一步的常用数学领域

- 分析学：实分析、泛函分析、复分析
- 拓扑学：点集拓扑、微分流形
- 概率：测度论、鞅论、泊松过程、跳跃扩散过程、随机收敛
- 数值计算：数值递归方法、数值微分方程、数据结构与高级语言程序设计（C/C++ 或 FORTRAN）

方法与资料：注意事项

- 优先参考经典的、原版教科书
- 具备基本知识体系后，碰到不清楚的概念或结论就查 Wikipedia
- 技术问题最快解决办法：问周边懂行的人
- 无须畏难：经济学研究需要掌握的不是数学解题技巧，而是数学思维、概念框架和重要结论
 - Lucas 的数学基本靠日积月累的自学，而且他是文科出身

代际更替与学术进步

Sargent (1996 *JME*) “Expectations and the Nonneutrality of Lucas”

In the early 70's, I thought that Modigliani, Solow, and Tobin - our heroes in those days - were missing the boat by resisting the intrusion of rational expectations into macroeconomics [...]

For better or worse, the best young scholars are always attracted to the technical high ground [...] The loyalty of those young scholars [...] was not to a particular macroeconomic model but to following where technicalities and data impelled. They accepted Lucas's interpretation of the Phillips curve, and started working with the new equilibrium concept of rational expectations.