高级微观经济学

# 第 9 讲：道德风险与激励合约

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2017 年 12 月 19 日

# 本讲内容

1. 公司金融的例子
2. 线性合约
3. 最优合约问题

# 本节内容

# 风险转移（risk-shifting）

Jensen & Meckling (1976, JFE)

- 代理成本（agency cost）：委托/代理（principal-agent）关系中利益冲突导致的效率损失。
- 风险转移：债务融资的代理成本之一，公司股东/管理层与债权人之间的利益冲突
  ——风险债务的存在使得股东/管理层偏好风险更高的投资项目。
- 其他代理成本：管理层与公司股东之间的代理问题，如管理层激励问题，自由现金流问题。

# 简化模型：风险中性的企业家和投资人

- $t=0$ 投资 $F$，$t=1$ 选择项目 $A$ 或 $B$，$t=2$ 实现收益。
- $t=1$ 时的道德风险问题：企业家从互斥项目中选择一个

| | $\Pr(C^H=2C)$ | $\Pr(C^L=0)$ | $\Pr(C^M=C)$ |
|---|---|---|---|
| 项目 $A$ | $p_1$ | $p_2$ | $1-p_1-p_2$ |
| 项目 $B$ | $p_1+\Delta_1$ | $p_2+\Delta_2$ | $\cdots$ |

- 假设：$0<\Delta_1<\Delta_2$，$p_1+\Delta_1+p_2+\Delta_2<1$，故项目 $B$ 风险更高并且期望收益更低。
- $NPV_A=(1+p_1-p_2)C-F>$
  $NPV_B=(1+p_1+\Delta_1-p_2-\Delta_2)C-F$。
- 假设 $NPV_A>0$，应该投资 $F$；问题在于企业家如何选择。

# 两种融资方式：股权、债券

债券

- 假定企业通过发行面值 $K$ 的债券融资 $F$。
- 简化假设：$F > C$。故只当 $C^H$ 时企业家有正的回报：项目 $A$，$p_1(2C-K)$；项目 $B$，$(p_1+\Delta_1)(2C-K)$。
- 一旦得到融资，企业家选择 $B$：道德风险。

股权

- 假设企业家的外部融资比为 $1-\alpha$；企业家总选择最大化期望收益，且 $\alpha(1+p_1-p_2)C > \alpha(1+p_1+\Delta_1-p_2-\Delta_2)C$。

当存在管理层/股东和债权人之间的代理成本时，债务融资会造成风险转移，而股权融资可以保证合适的激励约束。

# 本节内容

1. 公司金融的例子
2. 线性合约
3. 最优合约问题

# 道德风险与激励合约：一般情形

- 委托人的效用为 $V(q-w)$，代理人的效用为 $u(w)-\phi(a)$。
- 产出 $q=Q(\theta,a)$：$\theta$ 随机（“生产率冲击”），$a\in A$ 是代理人的行动，“努力程度”（effort），不可观测 $\Rightarrow$ 直接以 $F(q|a), f(q|a)$ 记选择 $a$ 时产出 $q$ 的条件 cdf,pdf。
- $V'>0, V''\leq 0, u'>0, u''\leq 0, \phi'>0, \phi''>0$。
- 委托人激励合约 $w(q)$ 设计问题：

$$\max_{w(q),a} \int V(q-w(q))f(q|a)\mathrm{d}q$$

$$\text{subject to} \int u(w(q))f(q|a)\mathrm{d}q-\phi(a)\geq \bar{u}, \tag{IR}$$

$$a\in \underset{z\in A}{\operatorname{argmax}} \int u(w(q))f(q|z)\mathrm{d}q-\phi(z). \tag{IC}$$

# CARA + Normal：线性合约

- 一般情况下最优激励合约很难得到解析解。
- 特例：委托人风险中性 $q-w$，代理人 CARA $u(w,a)=-e^{-\eta[w-\phi(a)]}$，产出 $q=a+\varepsilon$，$\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$。
- 进一步假设 $\phi(a)=\frac{1}{2}ca^2$。
- 把考虑的激励合约种类限制在线性合约 $w=t+sq$ 时，可以获取**最优线性激励合约**的解析解。
- 但这个最优线性合约并不是最优合约；Mirrlees (1975), Bolton & Dewatripont (2005) sec. 4.3。
- Holmström & Milgrom (1987) 在连续时间框架下给出了最优合约为线性的充分条件。

# 最优线性合约

- $\mathbb{E}\{-\exp[-\eta(t+s(a+\varepsilon)-ca^2/2)]\} = -e^{-\eta(t+sa-ca^2/2)}\mathbb{E}(e^{-\eta s\varepsilon}) = -e^{-\eta(t+sa-ca^2/2-\eta s^2\sigma^2/2)}$.
- $\max_a \mathbb{E}\{-e^{-\eta[t+sq-\phi(a)]}\} \Leftrightarrow \max_a t+sa-\frac{c}{2}a^2-\frac{\eta}{2}s^2\sigma^2$.
- 故给定线性合约，最优努力 $a=s/c$。
- 此时委托人的最优问题为 $\max_{t,s} s/c-(t+s^2/c)$ s.t. $t+sa-\frac{c}{2}a^2-\frac{\eta}{2}s^2\sigma^2=\bar{w}$。
- 可解得 $s=\dfrac{1}{1+\eta c\sigma^2}$。

# 本节内容

# 最优合约问题

- Holmström (1979) *B.J.E.*
- 给定 $q$ 的取值范围 $[\underline{q}, \bar{q}]$；假设 $f(q|a)$ 关于 $a$ 二阶可微。
- 委托人激励合约 $w(q)$ 设计问题 (P*)：

$$\max_{w(q),a} \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} V(q - w(q)) f(q|a) \mathrm{d}q \tag{P*}$$

$$\text{subject to} \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} u(w(q)) f(q|a) \mathrm{d}q - \phi(a) \geq \bar{u}, \tag{IR}$$

$$a \in \operatorname*{argmax}_{z \in A} \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} u(w(q)) f(q|z) \mathrm{d}q - \phi(z). \tag{IC*}$$

- (IC*) 表示原初（primitive）激励约束。
- 有激励约束下的解也称为次优（second best）合约。

# 激励合约：一阶方法（first order approach）

- (IC*) 形式下的原初激励合约问题 (P*) 很难研究。
- 在一系列正则条件 (Rogerson 1985 ECTA) 下，(IC*) 可以替换为相应的一阶、二阶条件：给定 $w(q)$ 时，代理人最优选择 $a$ 满足

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} u(w(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q = \phi'(a), \tag{IC}$$

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} u(w(q)) f_{aa}(q|a) \mathrm{d}q \leq \phi''(a). \tag{IC2}$$

- 一阶方法就是将 (P*) 中的约束 (IC*) 替换为 (IC)，从而得到问题 (P)。一般说来，(IC) 是对 (IC*) 严格的放松（relaxation），即便加上 (IC2) 也只保证局部极大值。

## 一阶方法的最优条件

- 一阶方法最优问题 (P):

$$\max_{w(q),a} \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} V(q - w(q)) f(q|a) \mathrm{d}q$$

$$\text{subject to} \quad \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} u(w(q)) f(q|a) \mathrm{d}q - \phi(a) \geq \bar{u}, \tag{IR}$$

$$\int_{\underline{q}}^{\bar{q}} u(w(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q = \phi'(a). \tag{IC}$$

- Lagrangian 函数：关于 $w(q)$ 和 $a$

$$\mathcal{L} = \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} \{[V(q - w(q)) + \lambda u(w(q))] f(q|a) + \mu u(w(q)) f_a(q|a)\} \mathrm{d}q - \lambda[\phi(a) + \bar{u}] - \mu \phi'(a).$$

## 关于次优合约 $w(q)$ 的一阶条件

- 对函数 $w(\cdot)$ 的最优化条件等价于对固定的 $q \in [\underline{q}, \overline{q}]$ 求关于一个实数变量 $w(q)$ 的一阶条件：

$$[-V'(q-w(q)) + \lambda u'(w(q))]f(q|a) + \mu u'(w(q))f_a(q|a) = 0.$$

- 上述条件可重写为

$$\frac{V'(q-w(q))}{u'(w(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}.$$

- $\mu = 0$ 时，上式是第一最优（first best）合约的条件。
- 用反证法证明：当 $u'' < 0$ 且 $F(q|a)$ 关于 $a$ 满足一阶占优，即 $F_a(q|a) < 0$ 对某些 $q$ 成立，则 $\mu > 0$。

## $\mu > 0$：第一步

- $\mathcal{L}$ 关于 $a$ 的一阶条件为

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} \{[V(q-w(q)) + \lambda u(w(q))] f_a(q|a) + \mu u(w(q)) f_{aa}(q|a)\} \mathrm{d}q - \lambda \phi'(a) - \mu \phi''(a) = 0.$$

- 反设 $\mu \leq 0$，利用 (IC) + (IC2)，上式等价于

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q-w(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q \leq 0.$$

- 接下来的步骤会证明反向不等式成立，得到矛盾。

## $\mu > 0$：第二步

- 以 $w_{FB}(q)$ 表示第一最优合约。可验证 $V'(q-z)/u'(z)$ 关于 $z$ 递增。
- 由 $\mu \leq 0$ 可知，当 $f_a(q|a) > 0$ 时，有

$$\frac{V'(q-w(q))}{u'(w(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)} \leq \lambda = \frac{V'(q-w_{FB}(q))}{u'(w_{FB}(q))},$$

故 $w(q) \leq w_{FB}(q)$；而当 $f_a(q|a) < 0$ 时，$w(q) \geq w_{FB}(q)$。
- 由此可知

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q-w(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q \geq \int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q-w_{FB}(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q.$$

下面证明右边的积分 $> 0$。

## $\mu > 0$：第三步

- 由分部积分及 $F_a(\underline{q}, a) = F_a(\overline{q}, a) = 0$ 可知

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q - w_{FB}(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q = \\ - \int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V'(q - w_{FB}(q))(1 - w'_{FB}(q)) F_a(q|a) \mathrm{d}q. \quad (*)$$

- 而由第一最优的一阶条件可知

$$w'_{FB}(q) = \frac{V''(q - w_{FB}(q))}{\lambda u''(w_{FB}(q)) + V''(q - w_{FB}(q))},$$

结合 $u'' < 0$ 有 $0 \leq w'_{FB}(q) < 1$。

- 再由 $F(q|a)$ 满足一阶随机占优，知 $(*)$ 右边 $> 0$。

# 激励合约的性质

- $\mu > 0$：最优激励合约，即问题 (P) 的次优解，与第一最优合约不同。
- 第一最优合约对应着无激励约束下的最优风险分担解（委托人/代理人之间）；当存在道德风险问题，即存在激励约束时，能够达到的只能是次优风险分担。
- 进一步的，考虑委托人是风险中性的情形：$V' = 1$。此时一阶条件为
$$\frac{1}{u'(w(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}.$$
- 当 $\frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}$ 关于 $q$ 递增时，可知次优合约 $w(q)$ 关于 $q$ 递增；而这一条件称为单调似然比性质（monotone likelihood ratio property）。