高级微观经济学

第 7 讲：不完美信息扩展博弈

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2017 年 12 月 5 日

本讲内容

1. 扩展形式博弈
2. 序贯均衡
3. 经典的例子
4. 常用的精炼模式

本节内容

扩展形式博弈的正式描述

- 参与者集合 N；行动集合 A。
- 节点集（历史集，树） H 满足：i. 有一个初始点 h_0；ii. $H \setminus \{h_0\}$ 中的节点形如 $h = (a_1, \ldots, a_k)$，即历史行动决定当前节点；iii. 若 $(a_1, \ldots, a_k) \in H \setminus \{h_0\}$，则 $(a_1, \ldots, a_{k-1}) \in H \setminus \{h_0\}$，即当前节点有唯一的前一步节点。
- 自然（nature）在初始点 h_0 从 $A(h_0) \subset A$ 中按分布 π 随机的选择一个行动 a_1。博弈终点集为 E。
- 对决策节点集 $H \setminus (E \cup \{h_0\})$ 中每一点 h，指定一个参与者 $\iota(h)$ 做出决策。
- 决策节点集划分为一组互不相交的信息集；每个信息集 I 满足：若 $h, h' \in I$ 则有 $\iota(h) = \iota(h')$ 且 $A(h) = A(h')$。
- 参与者 i 有终点效用函数 $u_i : E \to \mathbb{R}$。

信息集与参与者策略

- 把信息集 I 对应的参与者记为 $\iota(I)$；$\iota(I)$ 知道他处于 I 包含的某一节点 h 中，并且需要从行动集 $A(h)$ 中做出选择。
- 参与者 i 的纯策略：在每一个需要其决策的信息集上选择一个相应的行动；相应的可定义混合策略。
- 所有参与者的策略 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ 共同决定了（部分）H 以及（部分）E 上的一个概率分布；按照这个分布可以计算各参与者的期望效用 $\mathbb{E}^\sigma u_i$。
- 如果所有的信息集都是单点集（singleton），那么称这个博弈为完美信息（perfect information）博弈；除此之外，称为不完美信息（imperfect information）博弈。

倒向归纳和子博弈 Nash 均衡

- 对于完美信息博弈，可以使用倒向归纳法（backward induction）获得一个解，并且这个解是 Nash 均衡。
  - 例子：市场进入的例子。
- 对于特定的不完美信息博弈，仍可使用“倒推”的思想。
- 如果一个信息集 h 是单点集，且其后节点所在的信息集中所有节点均源自 h，则从 h 开始的博弈称为子博弈（subgame）。
- 子博弈完美（subgame perfect）Nash 均衡：限制在所有子博弈上仍然构成 Nash 均衡的策略组。

本节内容

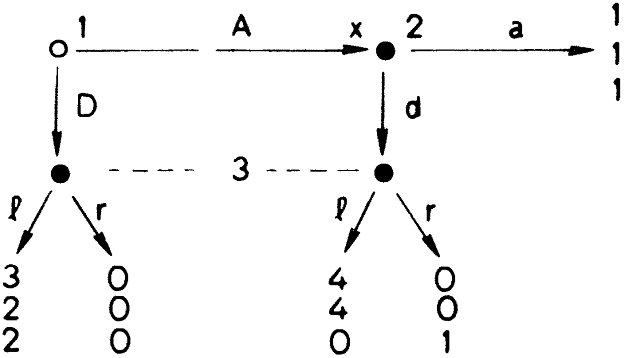
信念系统（belief system）

- 当一个信息集 I 包含多于一个节点时，该信息集的决策者需要形成一个关于其所处节点的（条件）概率分布 $\mu(h), h \in I$，才能计算其在该节点所做决策的期望效用。
- 所有参与者持有相同的信念系统 μ。
- 这样的分布 μ 称为一个信念系统；μ 与 σ 共同确定了整个博弈树上达到各个节点的概率分布，进而对每个参与者可以计算期望效用 $\mathbb{E}^{\mu,\sigma}u_i$。

序贯理性（sequential rationality）

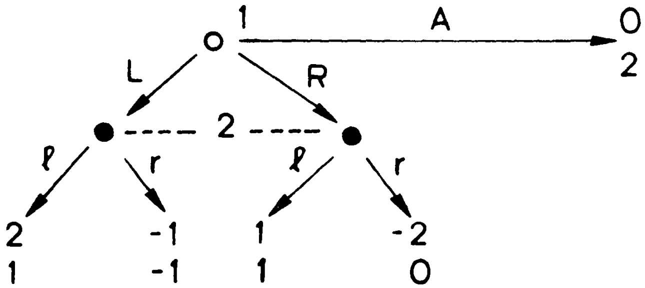
- 序贯理性要求给定所有对手的策略选择 σ_{-i} 和信念系统 μ，参与者 i 的策略选择 σ_i 需要在所有 i 做决策的信息集上都是最优的。
- 简言之，序贯理性要求每一轮决策时所选策略都是给定所处状态下最优。
- 子博弈完美 Nash 均衡（SPNE）即满足序贯理性。
- 由于引入了 μ，序贯理性的适用范围比（SPNE）要广。

序贯理性的例子 1



策略组 (D, a, ℓ) 是一个 Nash 均衡；但并不“合理”。SPNE 不适用于这个均衡，但序贯理性可以：给定 1 和 3 的策略，2 在其信息集（单点集 $\{x\}$）会选择 d。

序贯理性的例子 2



策略组 (A, r) 是一个 Nash 均衡；但并不“合理”。序贯理性在 1 的单点信息集得到满足；但对任意信念 μ（关于 2 的信息集 $\{L, R\}$），2 的序贯理性没有满足。合理的均衡应该是 (L, ℓ)

信念系统的确定

- 给定一个策略组 σ，如果到达一个信息集 I 的概率是正的，那么对这个信息集信念（概率分布）可以通过 Bayes 法则来计算：
$$\mu(h) = \frac{\Pr(h|\sigma)}{\sum_{h' \in I} \Pr(h'|\sigma)},$$
其中 $\sum_{h'} \Pr(h'|\sigma) > 0$。
- 问题：如果给定的策略组 σ 下到达某个信息集的概率是 0，如何确定该信息集的信念系统？
- Kreps & Wilson 的解决方案：信念系统要满足一致性（consistency）。

一致评估与序贯均衡

二元组合 (μ, σ) 称为一个评估（assessment）

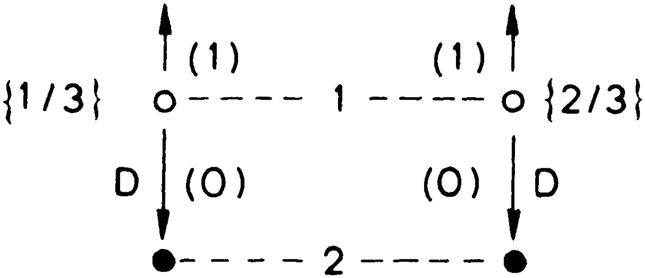
- 称 σ 为一个完全混合（totally mixed）策略组，如果每个参与者在每个信息集选择每个备选行动的概率都是正的。完全混合策略组通过 Bayes 法则确定了一个明确的信念系统。
- (μ, σ) 称为一致（consistent）评估，如果存在完全混合策略策略的序列 σ^n，及其确定的信念系统序列 μ^n，使得

$$\lim_{n\to\infty}(\mu^n, \sigma^n) = (\mu, \sigma).$$

序贯均衡（sequential equilibrium）

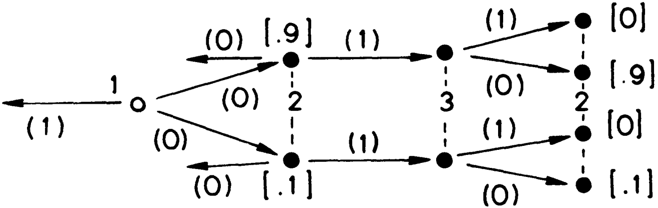
- 称 (μ, σ) 为一个序贯均衡，如果该评估是一致的并且满足序贯理性。

一致性对信念系统的限制：例 1



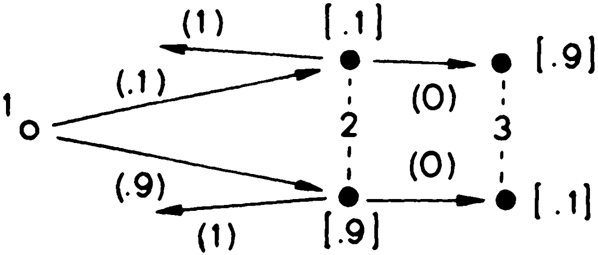
信念系统在 2 的信息集必须保证 $\mu(\text{left}) = 1/3$。

一致性对信念系统的限制：例 2



信念系统在 2 的最后一个信息集不满足一致性；给定 3 的策略，2 在其两个后续信息集上的信念应该保持一致。

一致性对信念系统的限制：例 3



信念系统在 3 的信息集不满足一致性；3 的信念需要与 1 的策略相一致。

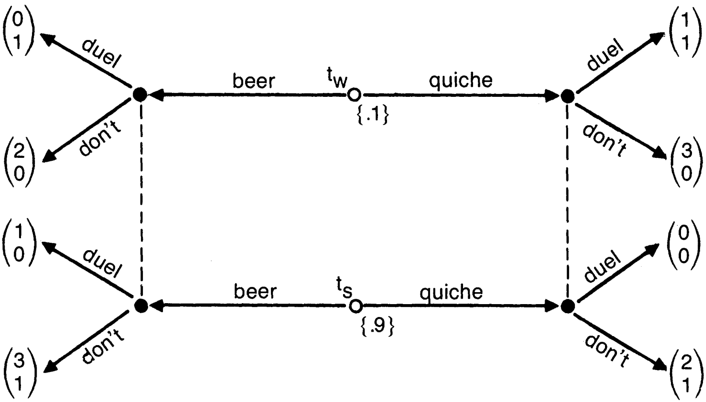
本节内容

Cho-Kreps 的例子：基本设定

两人早点铺决斗博弈

- 有两个参与者 A 和 B。
- A 可能属于两种类型（type）中的一种：软弱（wimpish）或好斗（surly）；自然（nature）在博弈一开始随机决定 A 的类型，$\Pr(t_s) = 0.9$。
- 博弈开始时 A 就知道自己到底是哪一类；A 需要选择吃蛋饼（quiche）还是啤酒（beer）。
- A 吃完早饭就碰上 B；B 能观察到 A 早餐吃了什么，但不知道 A 是什么类型，只知道类型的分布。
- B 选择要不要和 A 决斗；博弈结束。

对应的博弈树



2×1 向量里的第一个份量表示 A 的收益；这个博弈可以看做是一个不完美信息博弈。

进一步的解释

- A 从不同早点得到的收益取决于他的类型：如果 A 是软弱型，那他偏好蛋饼（1 单位收益增量）；若否，则偏好啤酒（1 单位收益增量）。
- A 的收益还取决于 B 是否选择决斗：不决斗会给 A 带来 2 单位的收益增量。
- B 决斗的收益取决于 A 的类型：只有当 A 是软弱型时，B 才会偏好决斗。
- 当参与者的收益取决于参与者的类型时，称为不完全信息（incomplete information）博弈；通常还假定类型的分布是公共知识（common knowledge：我知道 E，我知道你知道 E，我知道你知道我知道 E）。

两类序贯均衡

- 第一类：t_w, t_s 都选择啤酒，B 选择不决斗；如果 A 选择了蛋饼，那么 B 认为 A 是 t_w 的概率（后验信念，posterior belief）$\mu_w \geq 0.5$，并以超过 50% 的概率选择决斗。
  - 蛋饼被看作软弱型的信号（signal)；这样的博弈也称为信号博弈（signaling game)。
- 第二类：t_w, t_s 都选择蛋饼，B 选择不决斗；如果 A 选择了啤酒，那么 B 认为 A 是 t_w 的概率（后验信念，posterior belief）$\mu_w \geq 0.5$，超过 50% 的概率选择决斗。
- 两类均衡的策略都可以包括混合策略，但均衡结果（equilibrium outcome）都是确定的；两类均衡也都涉及均衡外信念（out-of-equilibrium belief)。
- 这类博弈均衡的多重性跟均衡外信念紧密联系。

第二类均衡的问题

- 第二类均衡中 B 的均衡外信念不是非常“合理”。
- 在这类“蛋饼”均衡中，软弱型的 A 的均衡收益为 3；但如果这类 A 选择了啤酒做早餐，那么他最多可以得到的收益只有 2。
- 而好斗型的 A 有可能通过选择啤酒做早餐得到更高的收益 3（若 B 也选择不决斗）。
- 因此，如果 B 看到 A 的变卦（defect：从蛋饼到啤酒），那么 B 应该排除是 t_w 型的可能，即 $\mu_s = 1$；如此，B 不会选择决斗。但如果好斗型的 A 意识到这个逻辑的话，那么 t_s 不应该选择蛋饼，而是啤酒。

回到第一类均衡

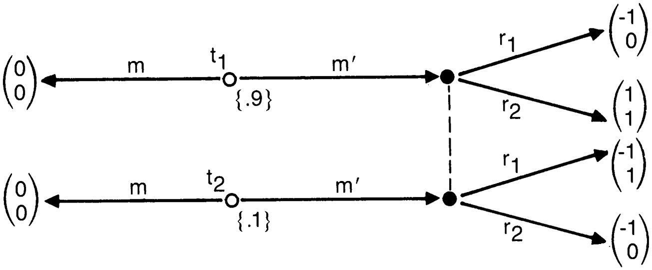
- 可以对“啤酒”均衡进行同样的论证。
- 好斗型的 A 是不会变卦的，只有软弱型的 A 可能变卦。但如此一来，B 会知道变卦吃蛋饼的肯定是 t_w，所以一定选择决斗。
- 软弱型预见到 B 的反应后会发现变卦是无益的。
- 这不但没有排除“啤酒”均衡而且还增强了。

本节内容

精炼模式

- 早餐决斗博弈中，我们论述了备选均衡中哪些“不合理”的，而选择出“合理”的。
- 这样的选择过程称为均衡的精炼（equilibrium refinement），使用的论证模式称为精炼模式（refinement scheme）。
- 同时可以见到，对序贯均衡的精炼主要是对均衡外信念的精炼：不“合理”的均衡实质是不“合理”的均衡外信念。
- 文献中有很多种精炼模式，我们举例说明两种最常用模式：占优准则（dominance criterion）和均衡占优准则（equilibrium dominance criterion）；后者更常称为直观准则（intuitive criterion）。

占优准则的例子

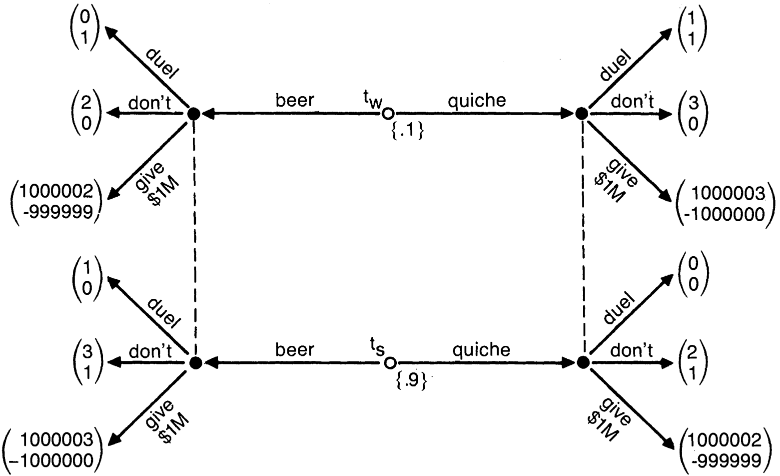


备选均衡：A 选择 m；若 A 选 m'，B 以超过 0.5 的概率选 r_1；$\mu(t_2) \geq 0.5$。占优准则可以排除这样的均衡外信念：m' 是 t_2 的被占优（dominated）策略。

均衡占优

- 早餐决斗中“蛋饼”均衡的排除就是直观准则的应用。
- 特别地，给定一个均衡：i. 我们通过对比某个类型的信息发送者（sender）的均衡收益和其变卦后能够得到的收益，来确定均衡外信念的形式；ii. 在此基础上，如果有别的类型的发送者会选择偏离均衡策略的话，那么称这个均衡无法通过直观准则。
- 特别的，在 i 中确定变卦后发送者的收益时需要考虑到信息接收者（receiver）也会有自己的最优反应（best response）：排除接受者选择被占优（dominated）策略的可能。

均衡占优的例子：接收者的反应



排除 B 的被占优选择“给 A 100 万”，就可以使用直观准则。