

高级微观经济学

第 4 讲：动态随机一般均衡 II

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2017 年 10 月 31 日

本讲内容

- ① 不完全市场均衡理论概述
- ② 均衡的存在性
- ③ 均衡的效率
- ④ 均衡的多重性

本节内容

① 不完全市场均衡理论概述

② 均衡的存在性

③ 均衡的效率

④ 均衡的多重性

不完全市场理论的早期发展

- ▶ Radner (1972) 提出动态市场一般均衡理论框架。
- ▶ Hart (1975) 指出不完全市场（商品组合证券）下：（1）均衡可能不存在；（2）均衡可能无效率；（3）增加非冗余证券可能导致更差的配置效率。
- ▶ 不完全市场理论在 80 年代的高潮：
 - ▶ Cass, Werner, Geanakoplos/Polemarchakis 等证明名义证券、计价物证券情形下均衡的存在性。
 - ▶ Duffie/Shafar 证明商品组合证券下均衡“几乎处处”存在。
 - ▶ Cass/Balasko, Werner, Geanakoplos/Mas-Colell 证明名义证券下均衡有严重的不定性（indeterminacy）。
 - ▶ Geanakoplos/Polemarchakis 证明了“几乎所有”均衡都是无效率的。

均衡效率概念的发展

- ▶ Diamond (1967) 年研究了一个不完全市场均衡模型的特例，提出了约束效率的概念 (constrained efficiency); 并说明他所研究的例子中均衡是约束有效的。
- ▶ Hart (1975) 年的例子表明均衡可以是约束无效的。
- ▶ 但令人满意的约束效率的概念直到 80 年代初才逐渐形成，主要包括 Stiglitz 及其合作者的多项工作。

不完全市场理论的后续发展

- ▶ 不完全市场理论早期发展（以两期模型为主）被总结在 Magill and Quinzii (1996) 的教课书中：**Theory of Incomplete Markets: Vol. I**。
- ▶ 90 年代初不完全市场的一般均衡理论主要在无穷期方面有所推进，随后基本停滞。
- ▶ 但不完全市场模型在宏观经济学（包括宏观金融）中获得很大发展：以 Bewley 的早期贡献为基础，经过 Aiyagari, Hugget, Krusell/Smith, Rios-Roll 等人的贡献，逐渐成为宏观经济学的主流分支。

基本经济环境：两期模型

- ▶ 基本商品空间 $X = \mathbb{R}_+^K$; $t = 0, 1$ 。
- ▶ 不确定性只发生在 $t = 1$, $S = \{1, \dots, S\}$ 。
- ▶ 家庭集合 $H = \{1, \dots, H\}$, $\{U^h, e^h\}_{h \in H}$; 其中 $U^h : X^{S+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $(e_0^h, e_s^h)_{s \in S} \in X^{S+1}$ 。
- ▶ 证券集合 $M = \{1, \dots, M\}$, 支付矩阵 $A = [A_1, \dots, A_M]$ 。
- ▶ 计价商品证券、名义证券: $A_m = (a_{1m}, \dots, a_{Sm})^\top$;
商品组合证券: $A_m = (\dots, a_{s1m}, \dots, a_{sKm}, \dots)^\top$ 。

不同类型证券对应的预算约束与均衡

价格系统 $(q, p) \in \mathbb{R}_+^M \times \mathbb{R}_+^{K(S+1)}$; $x_0, x_s \in X$, $y \in \mathbb{R}^M$ 。

▶ $t = 0$ 的约束: $p_0 \cdot x_0 + q \cdot y \leq p_0 \cdot e_0$ 。

▶ $t = 1$ 的约束

计价商品证券: $p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + p_{s1} \sum_{m \in M} a_{sm} y_m$;

名义证券: $p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + \sum_{m \in M} a_{sm} y_m$;

商品组合证券: 支付总值依赖于即期市场的商品价格

$p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + \sum_{m \in M} \left(\sum_{k \in K} p_{sk} a_{skm} \right) y_m$, 因此, 证券市场是否完全依赖于即期市场的价格向量。

竞争均衡 $\langle p, q, (x^h, y^h)_{h \in H} \rangle$: 对所有家庭实现预算约束集上效用最大化, 且市场出清。

本节内容

- ① 不完全市场均衡理论概述
- ② 均衡的存在性
- ③ 均衡的效率
- ④ 均衡的多重性

Hart 的例子：基本设置

$H = K = S = 2$ ；两商品记为 x, y ；两状态概率相等。

- ▶ 效用只取决于 $t = 1$ 的消费，用下标表示 (x_{hs}, y_{hs}) 。
- ▶ 家庭 1 在每个状态中的 Bernoulli 效用为 $2^{5/2}x_{1s}^{1/2} + 2y_{1s}^{1/2}$ ，期望效用为

$$U_1 = 2^{3/2}x_{11}^{1/2} + y_{11}^{1/2} + 2^{3/2}x_{12}^{1/2} + y_{12}^{1/2}.$$

- ▶ 家庭 2 的状态效用为 $2x_{2s}^{1/2} + 2^{5/2}y_{2s}^{1/2}$ ，期望效用为

$$U_2 = x_{21}^{1/2} + 2^{3/2}y_{21}^{1/2} + x_{22}^{1/2} + 2^{3/2}y_{22}^{1/2}.$$

- ▶ 家庭 1 的禀赋： $e_{11} = (5/2, 50/21)$, $e_{12} = (13/21, 1/2)$ ；
家庭 2 的禀赋： $e_{21} = (1/2, 13/21)$, $e_{22} = (50/21, 5/2)$ 。

Hart 的例子：证券结构

- ▶ 两只证券：
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
- ▶ 一单位 A_1 在两个状态均支付一单位商品 x ；一单位 A_2 在两个状态均支付一单位商品 y 。
- ▶ 给定状态价格向量 $(p_1, p_2) = (p_{x1}, p_{y1}, p_{x2}, p_{y2})$ ，两个证券支付的价值矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} p_{x1} & p_{y1} \\ p_{x2} & p_{y2} \end{bmatrix}.$$

证券市场是否完全取决于 V 是否满秩。

备选 RE 均衡的第一种情形： p_1, p_2 不成比例

- ▶ 若 p_1, p_2 不成比例，则两者线性无关，从而 V 是满秩矩阵。
- ▶ 若 V 满秩，则 RE 均衡一定对应于一个 AD 均衡。假设这个 AD 均衡的价格向量为 $\bar{p} = (\bar{p}_{x1}, \bar{p}_{y1}, \bar{p}_{x2}, \bar{p}_{y2})$ 。
- ▶ 家庭 1 的 AD 约束为 $\bar{p}_{x1}x_{11} + \bar{p}_{y1}y_{11} + \bar{p}_{x2}x_{12} + \bar{p}_{y2}y_{12} \leq \bar{p}_{x1}5/2 + \bar{p}_{y1}50/21 + \bar{p}_{x2}13/21 + \bar{p}_{y2}1/2$ 。
- ▶ 家庭 2 的 AD 约束为 $\bar{p}_{x1}x_{21} + \bar{p}_{y1}y_{21} + \bar{p}_{x2}x_{22} + \bar{p}_{y2}y_{22} \leq \bar{p}_{x1}1/2 + \bar{p}_{y1}13/21 + \bar{p}_{x2}50/21 + \bar{p}_{y2}5/2$ 。
- ▶ 市场出清条件为 $x_{1s} + x_{2s} = y_{1s} + y_{2s} = 3$ 。

第一种情形的 AD 均衡

- ▶ 可解得唯一的 AD 均衡: $\bar{p} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$,

$$(x_{11}, y_{11}) = (x_{12}, y_{12}) = (8/3, 1/3),$$

$$(x_{21}, y_{21}) = (x_{22}, y_{22}) = (1/3, 8/3).$$

- ▶ 但由 AD 均衡与 RE 均衡的对应性质知, 若 (p_1, p_2) 是 RE 均衡的价格向量, 则应有

$$p_{x1}/p_{y1} = \bar{p}_{x1}/\bar{p}_{y1}, \quad p_{x2}/p_{y2} = \bar{p}_{x2}/\bar{p}_{y2},$$

与 p_1, p_2 不成比例的假设矛盾。故此种情况下无 RE 均衡。

备选 RE 均衡的第二种情形： p_1, p_2 成比例

- ▶ 首先注意到此种情况下 V 的两列也是成比例的，所以任何投资组合都无法使得在状态 1 时的净支付为正而状态 2 时的净支付为负，或相反。
- ▶ 因此两个家庭都不能通过在 $t = 0$ 时买卖证券在 $t = 1$ 的两个状态之间转移资源。
- ▶ 又由于证券选择 $z_h = (z_{h1}, z_{h2})$ 满足市场出清， $z_1 = -z_2$ ，因此均衡时 z_1, z_2 的支付总值均为 0。
- ▶ 于是 RE 均衡可通过分别求解状态 1 和 2 对应的均衡获得。
- ▶ 可计算唯一的均衡价格分别为
 $p_1 = (2/3, 1/3), p_2 = (1/3, 2/3)$ 。与假设矛盾。

存在性的一般结果

- ▶ Radner 最早给出的存在性结果假设了证券组合 $|y_m|$ 必须是有界的；该条件满足时，可以证明家庭的预算约束对应是上半连续的。但这样的界限是人为任意选取的。
- ▶ Hart 的例子表明，如果不人为添加这样的上界，那么预算约束集在 $p_1 = p_2 = (1, 1)$ 处是非上半连续的，从而消费选择是不连续的，均衡不存在。
- ▶ 一般情况下，Duffie and Shafer (1985) 证明，给定禀赋集合 \mathcal{E} 和商品组合证券集合 \mathcal{A} 为开集且效用函数满足一定的光滑条件，则对几乎所有的 $(e, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{A}$ ，RE 均衡都存在。
- ▶ Cass (1984), Werner (1985), Geanakoplos and Polemarchakis (1986), 在传统的凸假设下对名义证券和计价商品证券证明了均衡的存在性。

本节内容

- ① 不完全市场均衡理论概述
- ② 均衡的存在性
- ③ 均衡的效率
- ④ 均衡的多重性

Hart 的例子：改变证券结构

- ▶ 继续考虑 Hart 的例子。只改变证券的支付结构如下：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- ▶ 重复之前对两个情形—— p_1, p_2 成或不成比例——的讨论，可以计算得到每种情形对应了唯一的 RE 均衡。
- ▶ 第一种情形的均衡效用： $U_1 = U_2 = 2^{5/2}(\frac{8}{3})^{1/2} + 2(\frac{1}{3})^{1/2}$ ；
第二种情形：
 $U'_1 = U'_2 = 2^{3/2}(\frac{62}{21})^{1/2} + (\frac{31}{21})^{1/2} + 2^{3/2}(\frac{32}{21})^{1/2} + (\frac{1}{21})^{1/2}$ 。
- ▶ 可验证， $U_1 = U_2 > U'_1 = U'_2$ 。

多商品环境下的约束效率的概念

继续假设 U^h 不依赖于 c_0^h ; $t = 0$ 时只进行计价商品证券买卖。

- ▶ 对任一可行证券配置 $y = (y^h)$ (满足 $\sum_h y^h = 0$), 定义 y -均衡为 $\langle p, (x^h)_h \rangle$ 满足效用最大化与市场出清, 其中效用最大化对应的预算约束为

$$p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + p_{s1} \sum_{m \in M} a_{sm} y_m.$$

- ▶ 一个可行配置 $(x^h, y^h)_h$ 称为约束有效的 (constrained efficient), 如果不存在另一个可行证券配置 \tilde{y} 及 \tilde{y} -均衡 $\langle p, \tilde{x} \rangle$ 使得 \tilde{x} Pareto 优于 x 。

约束效率的主要结论

- ▶ Geanakoplos and Polemarchakis (1986) 证明, 给定 $K \geq 2$, 给定 A 且 $M < S$, 在一定的光滑性条件下, 对几乎所有的 $(e, U) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U}$, 其对应的 RE 均衡是约束无效的。其中 \mathcal{U} 表示效用函数 $(U^h)_h$ 的一个给定空间。
- ▶ 引起约束无效的主要原因是价格外部性 (pecuniary externality): 不完全市场下, 证券重新配置不只是直接改变家庭在各个状态下财富, 而且还会通过改变相对价格导致额外的财富转移; 而这些额外的财富转移很有可能是不能通过单纯的证券交易实现的。经典参考文献是 Greenwald and Stiglitz (1986)。
- ▶ 若只有一个商品, 则约束有效性得到保证, 回到 Diamond (1967) 的经典结果。

本节内容

- ① 不完全市场均衡理论概述
- ② 均衡的存在性
- ③ 均衡的效率
- ④ 均衡的多重性

均衡的不定性

- ▶ 给定一组参数，如禀赋、效用函数、证券结构等，我们可以计算对应的均衡。
- ▶ 若均衡不止一个，则称其为不定的 (indeterminate)。
- ▶ 名义/实际不定性 (nominal/real indeterminacy):
 - 名义不定性：均衡价格 p 不止一个；
 - 实际不定性：消费配置 $(x^h)_h$ 不止一个。
- ▶ 局部唯一性/不定性 (local uniqueness/indeterminacy):
 - 局部唯一性：每个均衡的小邻域内没有别的均衡；
 - 局部不定性：每个均衡的任意小邻域内都有别的均衡。

均衡不定性的主要结论

给定不完全市场，即 $M < S$ ；以及适当的效用函数光滑性

- ▶ 对于实际证券的情形（计价商品证券和商品组合证券），对于几乎所有的 $(e, U, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{A}$ ，均衡配置都是局部唯一的。详见 Geanakoplos and Polemarchakis (1986), Duffie and Shafer (1985)。
- ▶ 对于名义证券的情形，对于几乎所有的 $(e, U, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{A}$ ，均衡配置都是局部不定的；更具体的，配置空间中存在一个维数大于等于 1 的子集，使得其中每一点都是给定的 (e, U, A) 下的均衡配置。详见 Balasko and Cass (1989), Geanakoplos and Mas-Colell (1989)。

太阳黑子 (sun spot) 均衡

- ▶ 不完全市场情形下还可能发生太阳黑子均衡的现象。
- ▶ 假设 $H = K = S = 2, M = 0$; 两个状态中两个家庭的禀赋和效用都完全一致, 即没有内蕴 (intrinsic) 的不确定性; 这两个状态称为外在的 (extrinsic)。
- ▶ 假设每个状态的即期市场都有多个均衡, 则选取两个不同的均衡 $p_1 \neq p_2$, 及相应的均衡配置 $x_1^h \neq x_2^h$ 。
- ▶ 所谓太阳黑子均衡是指: $t = 1$ 时, 若所有人都相信外在状态 1 发生, 则市场以 p_1 出清; 若所有人都相信外在状态 2 发生, 则市场以 p_2 出清。
- ▶ 光滑交换经济具有三个均衡的经典例子见 Shapley and Shubik (1977); 黑子均衡最早在世代交叠模型的研究中被提出, 见 Cass and Shell (1983)。