高级微观经济学

第 3 讲：完全市场动态随机一般均衡

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2017年10月24日

本讲内容

1. 证券市场的结构
2. 理性预期均衡的概念
3. 完全市场下均衡的性质

本节内容

1. 证券市场的结构
2. 理性预期均衡的概念
3. 完全市场下均衡的性质

基本假设：两期的交换经济

- 基本商品空间 $X = \mathbb{R}_{+}^{K}$；$t = 0, 1$。
- 不确定性只发生在 $t = 1$，$S = \{1, \ldots, S\}$。
- 家庭集合 $H = \{1, \ldots, H\}$，$\{U^h, e^h\}_{h \in H}$；其中 $U^h : X^{S+1} \to \mathbb{R}$，$(e_0^h, e_s^h)_{s \in S} \in X^{S+1}$。
- 考虑动态市场交易结构（dynamic market trading）：商品交易发生在事件依存即期市场，并通过证券交易达到跨期、跨状态的资源配置。

单一证券的定义

在动态随机一般均衡模型中，一只证券（security）由其在各个随机事件中的支付（payment）所界定。

按照支付的形式，证券可以分为三类：

- 一般商品组合支付证券；
- 计价商品（numeraire）支付证券；
- 名义计价单位（nominal unit of account）支付证券。

其中前两种合称为实际（real）证券，后一种称为名义或金融（financial）证券。

单只证券的向量表达

- 一般商品组合证券

$$A = (a_1^1, \ldots, a_1^K, \ldots, a_s^1, \ldots, a_s^K, \ldots, a_S^1, \ldots, a_S^K) \in \mathbb{R}_+^{KS},$$

a_s^k 表示一单位证券在事件 s 中支付的商品 k 的数量。
- 计价商品证券——选取商品 1 为计价物

$$A = (a_1, \ldots, a_S) \in \mathbb{R}_+^S,$$

a_s 表示在事件 s 中支付的计价物（商品 1）的数量。
- 名义证券

$$A = (a_1, \ldots, a_S) \in \mathbb{R}_+^S,$$

a_s 表示在事件 s 中支付的名义计价物（货币）的数量。

证券交易市场

- 给定证券集合 $M = \{1, \ldots, M\}$，每只证券记为 A^m。
- 所有证券在 $t = 0$ 的集中市场交易，遵循 ADM 惯例。
- 一个证券组合记为 $y = (y_1, \ldots, y_M) \in \mathbb{R}^M$。
- 一组证券价格记为 $q = (q_1, \ldots, q_M) \in \mathbb{R}^M_+$；通常选取与 $t = 0$ 即期市场相同的计价单位。
- 证券组合 y 在价格 q 下的总价值为 $q \cdot y$。

证券支付矩阵

- 给定 M 只证券 $\{A_1, \ldots, A_M\}$，每个 A_m 视为列向量。
- 其在 $t = 1$ 的**支付矩阵**定义为 M 列的矩阵 $A = [A_1, \ldots, A_M]$。
- 当 $\{A_m\}_{m \in M}$ 是计价商品证券或名义证券时，

$$A = [A_1, \ldots, A_M] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sm} & \cdots & a_{sM} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1} & \cdots & a_{Sm} & \cdots & a_{SM} \end{bmatrix}$$

是一个 $S \times M$ 的矩阵。

证券组合支付的矩阵表达

一下我们只考虑计价商品证券和名义证券。

- 给定证券支付矩阵 A 和证券组合 y（记为 $m \times 1$ 的列向量）。
- 组合 y 在 $t = 1$ 时的**支付总额**为 A 与 y 的矩阵乘积：

$$Ay = \begin{bmatrix} \sum_m a_{1m} y_m \\ \vdots \\ \sum_m a_{Sm} y_m \end{bmatrix},$$

  其中 $\sum_m a_{sm} y_m$ 表示事件 s 中证券组合的支付总额。
- 特别的，证券组合满足线性性：y, y' 为两个证券组合，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则组合 $\alpha y + \beta y'$ 的总支付为 $\alpha Ay + \beta Ay'$。

线性独立证券

给定 $A_1, \ldots, A_M$。

- 若存在 $M-1$ 个不全为零的实数 $y_1, \ldots, y_{m-1}, y_{m+1}, \ldots, y_M$ 使得

$$A_m = y_1 A_1 + \cdots y_{m-1} A_{m-1} + y_{m+1} A_{m+1} + \cdots + y_M A_M,$$

  则称 A_m 为冗余证券。
- 若给定的 M 只证券 $\{A_1, \ldots, A_M\}$ 中不存在冗余证券，则称其为**线性独立证券集合**。
- 线性代数的基础知识：给定 $\{A_1, \ldots, A_M\}$，则其中线性无关的证券数量小于等于$\min\{S, M\}$。

证券市场的结构

不失一般性，假设 $t=0$ 市场中交易的 M 只证券 $A_1,\dots,A_M$ 均相互线性独立，则 $M \le S$。

- 若 $M=S$，则称该证券市场为**完全市场**。
- 若 $M<S$，则称该证券市场为**不完全市场**。
- 给定 $A_1,\dots,A_M$ 相互线性独立，支付矩阵 A 的**秩**为 M。完全市场对应于满秩的方阵 A。

两类典型的证券市场

- $M = S$，$A = [A_1, \ldots, A_S] = I$ 为单位阵，即对任一 s，

$$A_s = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{第 } s \text{ 位}}, \ldots, 0)^\top,$$

  符号 $\top$ 表示（矩阵）转置。只在事件 s 有单位支付的证券 A_s 称为 Arrow 证券，或事件依存证券。
- 完全市场的一个等价定义就是存在对应于所有事件 s 的 Arrow 证券。
- $M = 1$，$A = \iota = (1, \ldots, 1)^\top$ 全为 1；称为**无风险**证券。

本节内容

价格向量及预期

- $t = 0$ 时即期市场的价格向量记作 $p_0 \in \mathbb{R}_+^K$。
- $t = 1$ 事件 s 中即期市场的价格向量记作 $p_s = (p_{s1}, \ldots, p_{sK}) \in \mathbb{R}_+^K$。
- 整个价格向量记作 $p = (p_0, p_1, \ldots, p_S)$。
- $t = 0$ 时，$t = 1$ 的即期市场还没开放交易，$(p_s)_{s \in S}$ 是无法观测的！
- 因此，家庭 h 在 $t = 0$ 做消费决策时，必须形成对 $t = 1$ 时 S 个事件依赖市场中通行价格系统的**预期**。
- $(p_s)_{s \in S}$ 只是价格（系统）的预期（expectation）。

分期、分事件的预算约束

- 一个消费计划可以表示为 $x = (x_0, (x_s)_{s\in S}) \in \mathbb{R}_+^{K(S+1)}$。
- 给定一组证券 $A = [A_1, \ldots, A_M]$，证券组合记为 $y \in \mathbb{R}^M$。
- 给定 $t = 0$ 时的价格系统 (p_0, q)，家庭的预算约束为

$$\{(x_0, y) \in \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}^M : p_0 \cdot x_0 + q \cdot y \le p_0 \cdot e_0\}.$$

  注意 q 的单位与 p_0 相同。
- 给定 $t = 0$ 时的价格预期 $(p_s)_{s\in S}$，家庭在各个事件 $s \in S$ 中的预算约束为

$$\left\{x_s \in \mathbb{R}_+^K : p_s \cdot x_s \le p_s \cdot e_s + p_{s1} \sum_{m\in M} a_{sm} y_m\right\}.$$

总和预算约束

给定一组**计价商品证券** $A=[A_1,\ldots,A_M]$；给定家庭的禀赋 e，价格（预期）向量 (p,q)，则其在 $t=0$ 做消费及证券（投资）选择时的预算约束为

$$B(p,q)=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^{K(S+1)}\times\mathbb{R}^M: p_0\cdot x_0+q\cdot y\le p_0\cdot e_0,$$

$$\text{且 } p_s\cdot x_s\le p_s\cdot e_s+p_{s1}\textstyle\sum_{m\in M}a_{sm}y_m,\ s=1,\ldots,S\Big\}.$$

隐藏假设： 对所有 s，$p_{s1}>0$；计价商品证券总有价值。

理性预期均衡

定义 1

考虑两期动态随机交换经济 $\mathscr{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$；给定动态交易市场结构与一组计价商品证券 $A = [A_1, \ldots, A_M]$。称四元组 $\langle p, q, (x^h, y^h)_{h\in H}\rangle$ 为一个理性预期（rational expectations）竞争均衡，如果下面两组条件得到满足：

1. 给定价格（预期），对所有 $h \in H$，(x^h, y^h) 在 $B^h(p, q)$ 上最大化 U^h；
2. 配置 $(x^h, y^h)_{h\in H}$ 满足市场出清

$$\textstyle\sum_h x^h = \sum_h e^h, \qquad \sum_h y^h = 0.$$

“理性”注释：所有市场参与者具有相同且正确的预期。

理性预期均衡的几点历史注释

- 动态交易及证券市场结构最早由 Arrow 于 1953 年在文章 “The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing” 中提出；其中已经包含了理性预期的概念。
- Roy Radner（1968, 1972）正式提出了动态随机条件下动态交易及证券结构的一般模型，定义了理性预期均衡的概念，并给出了存在性的一些结论。
- Radner（1972）最早使用了 equilibrium of plans, prices, and price expectations（EPPPE）的名称；Kreps（2012）沿用了这个名称；后来文献也称之为 Radner 均衡。
- 随着宏观经济学在 70 年代末大幅转向理性预期的理论框架，理性预期均衡成为更流行的术语。

“理性预期”名词的几点注释

- “理性预期”的称呼最早由 John F. Muth（1961）在文章“Rational Expectations and the Theory of Price Movements”中提出；但起初并没有获得重视。
- Robert Lucas 60 年代末在 CMU 任职时接触并接受了 Muth 的“理性预期”概念；后又认识到Arrow-Debreu-Radner 的“理性预期”所对应的动态随机均衡理论可以直接应用在宏观问题研究中。再之后就有了理性预期革命。
- “理性预期”概念是与均衡相联系的。Muth 最早的模型实际上就是一个均衡模型。
- 本质上，理性预期概念与 Nash 均衡一脉相承：给定对手选择均衡策略的预期，我也选择均衡策略，结果实现均衡。

本节内容

理性预期均衡性质概览

- 动态市场情形下理性预期均衡的性质与给定的证券市场结构有很大关系。
- 完全市场理性预期均衡与 Arrow-Debreu 均衡等价。
- 但不完全市场理性预期均衡的就有各种问题；不完全市场是一种典型的**市场失灵**（market failure）或**市场摩擦**（market friction）。

当前模型中的 AD 均衡

定义 2

考虑两期动态随机交换经济 $\mathscr{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$，并给定 AD 事件依存商品市场结构。二元组 $\langle p, (x^h)_{h\in H}\rangle$ 称为一个 AD 竞争均衡，如果下列条件得到满足：

- 给定 p，对所有 $h \in H$，x^h 在

$$B^h(p) = \{z^h \in \mathbb{R}_+^{K(S+1)} : p \cdot z^h \leq p \cdot e^h\}$$

  上最大化 U^h；
- 市场出清：$\sum_h x^h = \sum_h e^h$。

完全市场理性预期均衡与 AD 均衡的等价性

定理 1

给定动态随机交换经济 $\mathscr{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$ 且假设 U^h 均为单调的。若在动态市场交易结构下给定的证券市场是完全的，则对任一理性预期均衡 $\langle p, q, (x^h, y^h)_{h\in H}\rangle$ 满足$(p_{11}, \ldots, p_{S1}) \gg 0$，存在一个 AD 均衡 $\langle \hat{p}, (\hat{x}^h)_{h\in H}\rangle$ 满足$(\hat{p}_{11}, \ldots, \hat{p}_{S1}) \gg 0$，使得 $(x^h)_{h\in H} = (\hat{x}^h)_{h\in H}$；反之亦然。

完全市场理性预期均衡的福利性质

按均衡定义，$t=0$ 时证券总量为零 $\sum_h y^h = 0$，故 $t=1$ 时证券净支付总额 $A\sum_h y^h = 0$。因此，证券交易不改变经济中资源总量 $\sum_h e^h$。再由完全市场理性预期均衡与 AD 均衡的等价性，得到如下重要结论：

定理 2

完全市场理性预期均衡对应的消费配置是 Pareto 最优的。

换言之：完全市场动态交易机制可以实现最有效率的跨期、跨状态资源配置，保证最优的风险分担（risk-sharing）。