高级微观经济学

第 1 讲：微观经济学经典理论

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2017 年 9 月 26 日

本讲内容

1. 经典消费者理论
2. 经典企业理论
3. 经典一般均衡理论

本节内容

1. 经典消费者理论
2. 经典企业理论
3. 经典一般均衡理论

消费者偏好

- 商品空间 $X \subset \mathbb{R}_+^K$：通常直接取做 $\mathbb{R}_+^K$。
- 偏好 $\succsim$：X 上的一个二元关系，满足
  1. 完全性——对任意的 $x, y \in X$，$x \succsim y$ 或者 $y \succsim x$;
  2. 反身性——对任意的 $x \in X$, $x \succsim x$;
  3. 传递性——对任意的 $x, y, z \in X$, 若 $x \succsim y$，$y \succsim z$，则 $x \succsim z$。
- 进一步地，可定义
  1. $x \precsim y$，若 $y \succsim x$;
  2. $x = y$，若 $x \succsim y$ 且 $y \succsim x$;
  3. $x \succ y$，若 $x \succsim y$ 且 $y \not\succsim x$。

偏好的性质与表示

偏好的性质

- 连续性：对任意的 $x \in X$，$\{y \in X : y \succsim x\}$ 和 $\{y \in X : y \precsim x\}$ 都是 X 中的闭集。
- 单调性：若 $x \geq y$，则 $x \succsim y$；且若 $x \gg y$，则 $x \succ y$。
- 凸性：X 是凸集；若 $x, y \succsim z$，则对任意的 $\alpha \in [0,1]$，有 $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim z$。

偏好的效用函数表示

- 若有 $U : X \to \mathbb{R}$ 满足 $x \succsim y$ 当且仅当 $U(x) \geq U(y)$，则称 U 为 $\succsim$ 的一个表示。

效用函数的性质

- 给定偏好 $\succsim$，若 U 是 $\succsim$ 的表示，则对于任意的单调递增函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f\circ U: x\mapsto f(U(x))$ 也是 $\succsim$ 的表示。
- 若 $\succsim$ 是凸的，则 $\succsim$ 的任一表示 U 是拟凹的（quasi-concave）。
- 若 $\succsim$ 是单调的，则 $\succsim$ 的任一表示 U 满足：$U(x)\geq U(y)$，若 $x\geq y$；且 $U(x)>U(y)$，若 $x\gg y$。

效用表示的存在性

定理 1 (Debreu, 1954)

若 X 上的偏好 $\succsim$ 是连续的，则存在连续函数 $U : X \to \mathbb{R}$ 使得 U 是 $\succsim$ 的效用函数表示。

注 1：Rubinstein 第二章证明了一个较弱的结论，即连续偏好有效用函数表示（但该效用函数不一定连续）；MWG，Kreps 和 JR 中均在额外假设偏好单调的情形下给出了证明。
注 2：若偏好不连续，则可能不存在效用函数表示；见 Rubinstein 第二章中 lexicographic 偏好的例子。

消费者最优化问题

- 给定商品空间 $X = \mathbb{R}_+^K$ 及（相对）价格系统 $p \in \mathbb{R}_+^K \setminus \{0\}$。
- 给定消费者的偏好（假设其连续）及相应的效用函数表示 $U : X \to \mathbb{R}$；给定该消费者的禀赋（endowment）向量 $e \in \mathbb{R}_+^K$。
- 消费者的预算约束（budget constraint）集合为：

$$B(p) = \{x \in X : p \cdot x \leq p \cdot e\}.$$

- 消费者效用最优化问题为：$\max_{x \in B(p)} U(x)$。
- 该问题的解（当存在时），$D(p) = \operatorname{argmax}_{x \in B(p)} U(x)$，称为需求对应（demand correspondence）。

消费者最优化问题的几个性质

- 齐次性：任取 $\alpha > 0$，由 $B(p) = B(\alpha p)$ 知 $D(p) = D(\alpha p)$。
- 可取标准化价格空间：$\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^K : \sum_k p_k = 1\}$，即 $K-1$ 维单纯形（simplex）。
- 把 $B(p)$ 视作 $\Delta \rightrightarrows X$ 的对应。若 $e \gg 0$，则 B 连续。
- 若 U 是拟凹函数，则 $D(p)$ 是凸集。
- 注意，$D(p)$ 和 Marshallian 需求对应不一样，后者所对应的预算集合为

$$B(p, w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\},$$

其中 $w > 0$ 为收入。

本节内容

1. 经典消费者理论
2. 经典企业理论
3. 经典一般均衡理论

生产技术的描述

生产集合

- 企业的生产计划（production plan）由 $\mathbb{R}^K$ 中的点 y 表示。
- y 的负坐标对应投入品，正坐标对应产出品。
- 企业的生产集合（production set）记为 Y。
- 这种描述方法比生产函数的方法更一般。

通常假设单个企业的 Y 满足：

- $Y \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$——不能无中生有；
- Y 是闭凸集；
- $Y + \mathbb{R}^K_- \subset Y$——实质是可自由处置（free disposal）任何多余产品。

企业目标和所有权结构

完全竞争下企业利润最大化

- 给定价格系统 $p \in \Delta$，企业利润为 $p \cdot y$。
- 企业利润最大化：$\max_{y \in Y} p \cdot y$。

所有权结构与利润分配

- 假设经济中 H 个家庭共同拥有一个企业。
- 每个家庭享有 $\theta^h \in [0, 1]$ 的权益，$\sum_h \theta^h = 1$。
- 每个家庭的分配到的利润为 $\theta^h p \cdot y$。

本节内容

1. 经典消费者理论
2. 经典企业理论
3. 经典一般均衡理论

经典一般均衡模型的基本市场结构

- 给定商品集合 $K = \{1, \ldots, K\}$。
- 一个中央市场（centralized market），分为 K 个分市场。
- 市场参与者（家庭或企业）只在中央市场进行买卖交易。
- 所有 K 个分市场同时开启，每个市场 k 公布一个价格 p_k。
- 参与者获知价格系统 $p = (p_1, \ldots, p_K)$，并各自决定对每个商品的需求与供给。
- 所有交易决策汇总到形成总需求/供给；然后市场关闭。
- 每个参与者只关心价格；无视其他参与者。
- 竞争性体现在市场参与者均在给定价格下决策。

若干注记

- 经典一般均衡模型也称为 Arrow-Debreu-McKenzie 模型。
  - Kenneth Arrow and Gerard Debreu (1954) "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy" Econometrica.
  - Lionel McKenzie (1959) "On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market" Econometrica.
  - 但两篇文章同样在 1953 年的 Econometric Society 冬季会议上宣讲了。
- ADM 模型竞争性均衡相关理论统称为经典一般均衡理论。
- Debreu (1959) **Theory of Value** 是经典参考文献。
- Debreu (1982) **Handbook of Mathematical Economics** 的相关章节包括经典一般均衡理论后续发展的很多结果。

交换经济（exchange economy）

给定家庭集合 $H=\{1,\dots,H\}$，及每个家庭对应的效用函数 $U^h: X=\mathbb{R}^K_+\to\mathbb{R}$ 与禀赋 $e^h\in X$。

定义 1 (交换经济的竞争均衡)

给定一个交换经济 $\mathscr{E}=(e^h,U^h)_{h\in H}$。一个价格系统 $p\in\Delta$ 与一个商品配置 $(x^h)_{h\in H}$ 的组合 $\langle p,(x^h)_{h\in H}\rangle$ 构成一个竞争均衡（competitive equilibrium），若下列条件得到满足：

1. 对每个家庭 $h\in H$，有 $x^h\in \operatorname{argmax}_{z\in B^h(p)} U^h(z)$，其中 $B^h(p)=\{z\in X: p\cdot z\le p\cdot e^h\}$；
2. 市场出清 $\sum_{h\in H}(x^h-e^h)=0$。

生产经济的描述（production economy）

企业

- 给定企业集合 $J = \{1, \ldots, J\}$，及每个企业的生产集合 $Y^j \subset \mathbb{R}^K$。

家庭

- 给定家庭集合 $H = \{1, \ldots, H\}$，及每个家庭对应的效用函数 $U^h : X = \mathbb{R}_+^K \to \mathbb{R}$，禀赋 $e^h \in X$，与所持有的 J 个企业的权益份额 $\theta^h = (\theta_1^h, \ldots, \theta_J^h)$。
- $(\theta^h)_{h \in H}$ 对所有 $j \in J$ 满足 $\sum_h \theta_j^h = 1$。

定义 2 (生产经济的竞争均衡)

给定一个生产经济 $\mathscr{E} = ((U^h, e^h, \theta^h)_{h\in H}, (Y^j)_{j\in J})$。一个价格系统与一个商品配置（包括一组生产计划）的组合 $\langle p, (x^h)_{h\in H}, (y^j)_{j\in J}\rangle$ 构成一个竞争均衡，若下列条件得到满足：

1. 对每个企业 $j \in J$ 有 $y^j \in \operatorname{argmax}_{z\in Y^j} p\cdot z$；
2. 对每个家庭 $h \in H$ 有 $x^h \in \operatorname{argmax}_{z\in B^h(p,(y^j)_j)} U^h(z)$，其中 $B^h(p,(y^j)_j) = \left\{ z \in X : p\cdot z \le p\cdot e^h + \sum_{j\in J} \theta^h_j p\cdot y^j \right\}$；
3. 市场出清 $\sum_{h\in H}(x^h - e^h) - \sum_{j\in J} y^j = 0$。

均衡存在性：Arrow-Debreu 方法概要

- Arrow-Debreu (1954) 的经典证明是把均衡模型转化为一个广义博弈（generalized game）。
- 类似于 Nash (1950) 对 Nash 均衡存在性的证明，先证明该广义博弈有一个 Nash 均衡 $\langle p^*, \text{配置}^* \rangle$。
- 再证明这个 Nash 均衡是一个竞争均衡；特别地，配置* 满足市场出清条件。
- McKenzie 的证明方法不同，是直接考虑加总净需求 $Z(p) = \sum_h (D^h(p) - e^h)$。

广义博弈

概念

- 给定参与者集合 $N=\{1,\ldots,N\}$。
- 给定每个参与者 $n\in N$ 的初始策略集 S^n；S^n 是欧式空间的一个紧致凸子集。
- 定义 $S=S^1\times\cdots\times S^N$，并定义每个参与者 n 的得益函数 $\pi^n:S\to\mathbb{R}$。
- 定义参与者 n 的策略限制对应 $\varphi^n:S\rightrightarrows S^n$。
- 称组合 $\widetilde{\Gamma}=(S^n,\pi^n,\varphi^n)_{n\in N}$ 为一个广义博弈。

注：若 $\varphi^n(s)\equiv S^n$，即没有策略限制，则 $\widetilde{\Gamma}$ 就是一个博弈。

广义博弈的 Nash 均衡

最优回应对应

- 给定一个策略组（strategy profile）$s = (s^1, \ldots, s^N)$。
- 参与者 n 的单方偏离（unilateral deviation）定义为 $s|_n t = (s^1, \ldots, t, \ldots, s^N)$。
- 参与者 n 在 s 处的最优回应集（best reply set）定义为 $\beta^n(s) = \operatorname{argmax}_{t \in \varphi^n(s)} \pi^n(s|_n t)$。
- $\tilde{\Gamma}$ 的最优回应对应（best reply correspondence）定义为 $\beta = \beta^1 \times \cdots \times \beta^N : S \rightrightarrows S$。

定义 3 (广义博弈的 Nash 均衡)

若策略组 s 满足 $s \in \beta(s)$，则称其为 $\tilde{\Gamma}$ 的一个 Nash 均衡。

Nash 均衡的存在性

定理 2

给定 $\widetilde{\Gamma}$。若对所有 $n \in N$，π^n 关于 s 连续，关于 s^n 拟凹，并且 φ^n 是连续、紧致且凸取值的对应，则 Nash 均衡存在。

证明.

由 π^n 关于 s^n 拟凹且 φ^n 凸取值，知 β^n 取值为凸集。给定 φ^n 连续且紧致，由 Berge 最大值定理知 β^n 上半连续且紧致。可验证 $\beta = \beta^1 \times \cdots \times \beta^N : S \rightrightarrows S$ 也是上半连续、紧致且凸的，故由 Kakutani 不动点定理知存在 $s \in S$ 满足 $s \in \beta(s)$。 $\square$

交换经济中竞争均衡的存在性

定理 3

给定交换经济 $\mathscr{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$。若下列条件得到满足：

1. 对任意 $h \in H$，$e^h \gg 0$；
2. 对任意 $h \in H$，U^h 连续、拟凹且单调；
3. 对任意商品 $k \in K$，存在 $h \in H$，使得每当 $x \geq y$ 且 $x_k > y_k$ 时 $U^h(x) > U^h(y)$ 成立。

则存在一个竞争均衡。

均衡存在性的证明：定义一个广义博弈

- 选取 $m > \max_k \sum_h e_k^h$，定义 $M = \{x \in X : x_k \leq m\}$。
- 给定 H 个家庭参与者，外加一个特别的价格参与者。
- 定义策略空间 $S = \Delta \times M \times \cdots \times M$。
- 定义家庭参与者 $h \in H$ 的得益函数 $\pi^h : S \to \mathbb{R}$ 为

$$\pi^h(p, x^1, \ldots, x^h, \ldots, x^H) = U^h(x^h).$$

- 定义价格参与者的得益函数 $\pi^0 : S \to \mathbb{R}$ 为

$$\pi^0(p, x^1, \ldots, x^H) = p \cdot \textstyle\sum_h (x^h - e^h).$$

- 定义参与者的策略限制对应为

$$\varphi^h(p, x^1, \ldots, x^H) = B^h(p) \cap M, \quad \varphi^0 \equiv \Delta.$$

均衡存在性的证明：广义博弈的 Nash 均衡

- 验证上述定义的广义博弈满足定理 2 的条件。
- 其中最重要的一步是证明 $\varphi^h(p,(x_h^h)) = B^h(p) \cap M$ 的连续性。这里要用到 $e^h \gg 0$ 这个假设。
- 定理 2 保证存在一个 Nash 均衡 $\langle p,(x^h)_h \rangle$。
- 余下步骤就是验证 $\langle p,(x^h)_h \rangle$ 是一个竞争均衡。

均衡存在性的证明：验证 Nash 均衡是竞争均衡

1. 验证 $\sum_h x^h \leq \sum_h e^h$。
2. 验证对于任意 $h \in H$，x^h 在 $B^h(p)$ 上最大化 U^h，而不仅仅在 $B^h(p) \cap M$ 上如此。
3. 验证 $p \gg 0$。
4. 验证 $p \cdot x^h = p \cdot e^h$ 对任意 $h \in H$ 成立。
5. 验证 $\sum_h x^h = \sum_h e^h$

评论：$e^h \gg 0$ 对所有 $h \in H$ 成立是一个非常强的要求。这个条件可以弱化；详见 Dubey and Liu (2011)，3.2 节。

定理 4

给定生产经济 $\mathscr{E} = ((U^h, e^h, \theta^h)_{h\in H}, (Y^j)_{j\in J})$。保持定理 3 的条件不变，并假设 $(Y^j)_{j\in J}$ 满足如下条件：

1. 对任意 $j \in J$，$Y^j \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$；
2. 对任意 $j \in J$，Y^j 是闭凸集；
3. 对任意 $j \in J$，$Y^j + \mathbb{R}^K_- \subset Y$；
4. 令 $Y = Y^1 + \cdots + Y^J$，$Y \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$；
5. $Y \cap (-Y) = \{0\}$。

则存在一个竞争均衡。

Pareto 最优配置

给定交换经济 $\mathscr{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$

- 称配置 $(x^h)_h \in X^H$ 为可行的，如果 $\sum_h x^h \le \sum_h e^h$。
- 给定两个可行配置 $(x^h)_h$ 和 $(y^h)_h$。称 $(x^h)_h$ Pareto 优于 $(y^h)_h$，如果对所有的 $h \in H$ 有 $U^h(x^h) \ge U^h(y^h)$，且对至少一个 h 有 $U^h(x^h) > U^h(y^h)$。
- 称 $(x^h)_h$ 为一个 Pareto 最优配置，如果没有其它可行配置 Pareto 优于 $(x^h)_h$。

对生产经济 $\mathscr{E} = ((U^h, e^h, \theta^h)_{h\in H}, (Y^j)_{j\in J})$ 也可以类似的定义 Pareto 最优配置。

竞争均衡的福利性质

竞争均衡配置（competitive equilibrium allocation）

- 对给定的交换经济 $\mathscr{E}$，称一个配置 $(x^h)_h$ 为竞争均衡配置，若存在 $p \in \Delta$ 使得 $\langle p, (x^h)_h \rangle$ 是 $\mathscr{E}$ 的一个竞争均衡。
- 对生产经济也可类似定义。

定理 5 (福利经济学第一定理)

竞争均衡配置是 Pareto 最优配置。