高级微观经济学

第 0 讲：数学基础提要

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2017 年 9 月 19 日

本讲内容

1. 欧式空间的基本性质
2. 约束最优化与凸性
3. 对应与不动点定理

本节内容

1. 欧式空间的基本性质
2. 约束最优化与凸性
3. 对应与不动点定理

基本记号

关于集合

- $x \in X$；$X \subset Y$；X^c；$\varnothing$：空集。
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$：集合列的并；$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$：集合列的交，$n = 1, \ldots, \infty$。

关于欧式空间

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$：实线（实数集合）。
- $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$：$k$ 维欧式空间，k 为正整数。
- $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$：$\mathbb{R}^k$ 中一点（向量）。

$\mathbb{R}^k$ 的线性代数结构

$\mathbb{R}^k$ 是一个线性空间

- $0 = (0, \ldots, 0)$：$\mathbb{R}^k$ 的原点（零向量）。
- $\mathbb{R}^k$ 中的加法：$x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$，
$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k) \in \mathbb{R}^k.$$
- $\mathbb{R}^k$ 中的数乘：$x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$，$\alpha \in \mathbb{R}$，
$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k) \in \mathbb{R}^k.$$
- $-x = (-x_1, \ldots, -x_k)$；$x - y = x + (-y)$，$x - x = 0$。

$\mathbb{R}^k$ 上的内积和模

$\mathbb{R}^k$ 上的内积

- 对 $\mathbb{R}^k$ 中的任意两点 x, y，定义 $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k$，称为 x 和 y 的内积。
- 内积是一个对称双线性函数：$x \cdot y = y \cdot x$；$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$；$(\alpha x) \cdot y = \alpha x \cdot y$，$\alpha \in \mathbb{R}$。

$\mathbb{R}^k$ 上的（欧式）模

- 定义 $||x|| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$，称为 x 的欧式模。
- 三角不等式：$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$。

$\mathbb{R}^k$ 中的一种（偏）序结构

基本记号

- $x \geq y$：$x_i \geq y_i$，对所有 i。
- $x > y$：$x \geq y$，且对至少一个 i 有 $x_i > y_i$。
- $x \gg y$：$x_i > y_i$，对所有 i。
- $\mathbb{R}^k_+ = \{x \in \mathbb{R}^k : x \geq 0\}$，$\mathbb{R}^k_- = \{x \in \mathbb{R}^k : x \leq 0\}$。
- $\mathbb{R}^k_{++} = \{x \in \mathbb{R}^k : x \gg 0\}$，$\mathbb{R}^k_{--} = \{x \in \mathbb{R}^k : x \ll 0\}$。

$\geq$ 在 $\mathbb{R}^k$ 中定义了一个（二元）序关系

- 一般地，$(\mathbb{R}^k, \geq)$ 是偏序集：不是任意两个点都能比大小。
- 特别地，$(\mathbb{R}, \geq)$ 是全序集：任意两个数可以比大小。

$\mathbb{R}^k$ 中的开集

$\mathbb{R}^k$ 中的开球

- 给定 $\mathbb{R}^k$ 中的任意一点 x，对任意一个正数 $\epsilon > 0$，定义

$$B(x,\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^k : ||y - x|| < \epsilon\},$$

  称作以 x 为中心、ϵ 为半径的开球。
- $B(x,\epsilon)$ 的边界，$\{y \in \mathbb{R}^k : ||y - x|| = \epsilon\}$，不属于 $B(x,\epsilon)$。

开集的定义

- 给定 $\mathbb{R}^k$ 的子集 X。若对 X 中的任意一点 x，都存在 $\epsilon > 0$，使得 $B(x,\epsilon) \subset X$，则称 X 为开集。

$\mathbb{R}^k$ 中的闭集

闭集的定义

- 给定 $\mathbb{R}^k$ 的子集 X。若 X^c 为开集，则称 X 为闭集。
- 直观地说，闭集包含其边界。
- 特别地，$\mathbb{R}^k$ 和 $\varnothing$ 既是开集又是闭集。

一个重要性质——给定一列集合 $\{X_n \subset \mathbb{R}^k : n = 1, 2, \ldots, \}$:

- 若所有的 X_n 都是开集，则 $\bigcup_n X_n$ 也是开集；
- 若所有的 X_n 都是闭集，则 $\bigcap_n X_n$ 也是闭集。

$\mathbb{R}^k$ 中的极限

$\mathbb{R}^k$ 上的（欧式）距离

- 对于 $\mathbb{R}^k$ 中的两点 x, y，定义其距离为 $||x-y||$，即向量差的欧式模。

$\mathbb{R}^k$ 中点列的极限

- 给定 $\mathbb{R}^k$ 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及点 x。若对于任意的正数 $\epsilon > 0$，都存在正整数 N，使得不等式

$$||x_n - x|| < \epsilon$$

对任意 $n > N$ 成立，则称 x 为 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$。

闭集与点列的收敛性

点列的收敛性

- 给定点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$。若存在点 x，使得 $\{x_n\}$ 以 x 为极限，则称 $\{x_n\}$ 收敛；否则称其发散。

闭集的一个重要性质

- 若 X 为闭集，$\{x_n\} \subset X$ 收敛，则 $\lim_n x_n \in X$；换言之，X 中任一收敛点列的极限也属于 X。
- 逆命题也成立：给定 $X \subset \mathbb{R}^k$，若 X 中任一收敛点列的极限也属于 X，则 X 是闭集。

$\mathbb{R}^k$ 中的紧集

紧集的定义

- $\mathbb{R}^k$ 中的有界闭集称为紧集。

紧集的重要性质

- 若 X 为紧集，则 X 中的任意点列均有收敛子列。
- 逆命题也成立：给定 X，若其中任意点列均有收敛子列且极限也属于 X，则 X 是紧集。

点列收敛的条件

$\mathbb{R}^k$ 中的 Cauchy 列

- 给定 $\{x_n\}$。若对任意的 $\epsilon > 0$，存在 N，使得
  $$||x_n - x_m|| < \epsilon$$
  对任意的 $n, m > N$ 成立，则称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。
- 点列收敛当且仅当其为 Cauchy 列。

$\mathbb{R}$ 中的单调列

- $\mathbb{R}$ 中的有界单调列是 Cauchy 列，故收敛。

$\mathbb{R}$ 中点集的上、下确界

定义

- 给定 $\mathbb{R}$ 中的一个非空集合 X。
- X 的最小上界称为上确界，记为 $\sup X$。
- X 的最大下界称为下确界，记为 $\inf X$。
- 若 X 无上界，则约定 $\sup X = \infty$；若无下界，则 $\inf X = -\infty$。

性质

- 若 X 有上界，则 $\sup X$ 存在且有限。
- 若 X 有下界，则 $\inf X$ 存在且有限。

本节内容

连续函数

定义

- 给定 $D \subset \mathbb{R}^k$ 以及其上的函数 $f : D \to \mathbb{R}$。
- 给定点 $x \in D$。若对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

  $$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

  对任一 $y \in D \cap B(x, \delta)$ 成立，则称 f 在 x 处连续。
- 若 f 在 D 中每一点连续，则称其为（D 上的）连续函数。

基本性质

- 若 $f : D \to \mathbb{R}$ 连续，$\{x_n\} \subset D$ 收敛且极限 $x_0 \in D$，则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$。

函数值域的上、下确界

- 给定 $f: D \to \mathbb{R}$，$\{f(x): x \in D\}$ 称为 f 的值域。
- f 值域的上、下确界分别简记为 $\sup_{x\in D} f(x), \inf_{x\in D} f(x)$。
- 若 f 有界，则其上、下确界均有限。
- 若存在 $x_0 \in D$ 使得 $f(x_0) = \sup_x f(x)$，则称 $\sup_x f(x)$ 为 f 的最大值，记为 $\max_x f(x)$。
- 若存在 $y_0 \in D$ 使得 $f(y_0) = \inf_x f(x)$，则称 $\inf_x f(x)$ 为 f 的最小值，记为 $\min_x f(x)$。

紧集上的连续函数

定理 1 (Weierstrass)

若 $D \subset \mathbb{R}^k$ 为紧集，$f : D \to \mathbb{R}$ 连续，则

1. f 有界，$\sup_x f(x), \inf_x f(x)$ 存在且有限；
2. 存在 $x_0, y_0 \in D$ 使得

$$f(x_0) = \sup_x f(x) \qquad f(y_0) = \inf_x f(x).$$

亦即 f 在 D 上能取到最大值、最小值。

约束最优化的一般形式

- 给定目标函数 $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$。
- 给定 ℓ 个（不等式）约束，$g_i(x) \leq 0$，$i = 1, \dots, \ell$。定义约束集
$$C = \{x \in D : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, \ell\}.$$
- 对应的约束最优化问题记作：
$$\sup_{x \in C} f(x) \quad \text{或} \quad \sup f(x) \text{ s.t. } g_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, \ell.$$
- 通常而言，C 是紧集而 f 连续，故上述最优化问题有解，因此也直接写作 $\max_{x \in C} f(x)$。

凸性

- 给定 $X \subset \mathbb{R}^k$。若对于任意的 $x, y \in X$ 及 $0 \le \alpha \le 1$，有 $\alpha x + (1-\alpha) y \in X$，则称 X 为凸集。
- 凸集簇的任意交还是凸集。
- 给定凸集 $D \subset \mathbb{R}^k$ 及 $f : D \to \mathbb{R}$。若对于任意的 $x, y \in D$ 及 $0 \le \alpha \le 1$，有

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \le f(\alpha x + (1-\alpha) y),$$

  则称 f 为凹（或上凸）函数。若上式中 $<$ 成立，则称其为严格凹函数。
- 若上述定义中的不等号方向相反，则称为（严格）凸函数。

凹函数的性质

- 凹函数是连续函数。
- 若 f 为紧致凸集 D 上的凹函数，则其局部最大值为全局最大值。
- 若 f 为紧致凸集 D 上的严格凹函数，则其存在唯一的 $x_0 \in D$ 使得 $f(x_0) = \max_x f(x)$。
- 若 f 二阶连续可微，则 f 是凹函数等价于 f 的 Hessian 矩阵半负定；f 是严格凹函数等价于 f 的 Hessian 矩阵负定。
- 凹函数的上轮廓集 $\{x \in D : f(x) \geq z\}$ 是闭凸集。

约束最优化问题的一阶必要条件

给定 $f: D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 连续可微，$g_j: D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 连续可微，$j = 1, \ldots, \ell$。约束最优化问题

$$\max_x f(x) \text{ s.t. } g_j(x) \leq 0, \ j = 1, \ldots, \ell$$

的解 $x^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$ 满足如下一阶条件：

1. 存在非负实数 $\phi_1^*, \ldots, \phi_\ell^*$，使得

$$\partial_i f(x^*) = \phi_1^* \partial_i g_1(x^*) + \cdots + \phi_\ell^* \partial_i g_\ell(x^*), \quad i = 1, \ldots, k,$$

   其中 ∂_i 表示对 x_i 的偏导数，ϕ_i^* 称为 g_i 的 Lagrange 乘子；

2. $\phi_j^* g_j(x^*) = 0$ 对所有 ϕ_j^* 成立。

上述第二个条件又称为互补松弛条件（complementary slackness condition）。

凸优化的性质

- 若 f 为凸集 D 上的凹函数，且 g_j 使得约束集 C 也是凸集，则对应的最优化问题是一个凸优化问题。
- 对可微凸优化问题，即 f, g_j 均可微，$j = 1, \ldots, \ell$，前述必要条件亦为充分条件。
- 更一般地，若目标函数 f 的上轮廓集均为凸集，则对应的最优化问题称为凸优化问题。
- 上轮廓集为凸集的函数称为拟凹函数。

本节内容

对应（correspondence）的基本概念

给定 $X \subset \mathbb{R}^k$，$Y \subset \mathbb{R}^m$，$X, Y \neq \varnothing$。

- 若对 X 中的任一点 x，$\varphi(x)$ 是 Y 的一个子集，则称 φ 为 X 到 Y 的一个对应，记作 $\varphi : X \rightrightarrows Y$。
- 给定 $x \in X$。若对任意 $\{x_n\} \subset X$，$\{y_n\} \subset Y$，满足 $y_n \in \varphi(x_n)$，$\lim x_n = x$ 且 $\lim y_n = y$，即有 $y \in \varphi(x)$，则称 φ 在 x 处上半连续 (upper semi continuous)；若 φ 在 X 中处处上半连续，则称其为上半连续对应。
- 给定 $x \in X$。若对任意 $\{x_n\} \subset X$ 满足 $\lim x_n = x$ 和任意 $y \in \varphi(x)$，均存在 $\{y_n\} \in Y$ 满足 $y_n \in \varphi(x_n)$ 且 $\lim y_n = y$，则称 φ 在 x 处下半连续 (lower semi continuous)；若 φ 在 X 中处处下半连续，则称其为下半连续对应。

对应与带参数的最优化

定理 2 (Berge 最大值定理)

设 $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ 为一连续函数，$\varphi: X \rightrightarrows Y$ 为一连续（上半连续、下半连续）且紧致（对任一 $x \in X$，$\varphi(x)$ 紧致）对应。对任一 $x \in X$，考虑

$$\max_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{s.t.} \quad y \in \varphi(x),$$

并定义从 X 到 Y 的对应 $\eta(x) = \operatorname{argmax}_{y \in \varphi(x)} f(x, y)$，称为最大值对应。

1. 最大值对应 η 上半连续且紧致。
2. 最大值函数 $h(x) = \max_{y \in \varphi(x)} f(x, y)$ 连续。

Kakutani 不动点定理

定理 3 (Kakutani)

若 X 是欧式空间中的紧致凸集，$\varphi : X \rightrightarrows X$ 是上半连续的凸对应，则存在 $x \in X$ 满足 $x \in \varphi(x)$。

Kakutani 不动点定理可以看做 Brouwer 不动点定理的一般形式；或将后者看做前者的特例。

定理 4 (Brouwer)

若 X 是欧式空间中的紧致凸集，$f : X \to X$ 是连续映射，则存在 $x \in X$ 满足 $x = f(x)$。