武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期
博士生高级微观经济学课程第 9 次作业

提交日期：12 月 19 日

Spence 劳动力市场信号模型

考虑两种类型的工人，生产率 $k=1$ 或 2，效用函数为 $u_k(w,e)=w-\theta_k g(e)$，其中 $\theta_1>\theta_2$，$g(e)$ 为 2-阶连续可微严格递增、严格凸函数，满足 $g'(0)$ 充分小。高、低生产率员工的比例为 $1-\pi>0$ 和 $\pi>0$。工人先选择各自的教育程度 e_k，随后两家企业根据观察到的受教育程度，以及各个教育程度中低技能员工比例的信念 $\mu(e)$，支付竞争性的工资 $w(e)$。生产率为 k、教育程度为 e 的工人可以为企业带来的价值为 ke。

a. **单交性**（single crossing property） 假设 $f(x,\theta):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2-阶连续可微，$\partial^2 f/\partial x\partial\theta\geq 0$ 且对任意 x 该二阶导关于 θ 不恒为 0。(i) 请证明，对任意的 $\theta_1>\theta_2$，$f(x,\theta_1)$ 与 $f(x,\theta_2)$ 至多交于一点。(ii) 请验证 $u(w,e,\theta)=w-\theta g(e)$ 的无差异曲线（表示为 e,θ 的函数）满足单交性条件。

b. 假设类型为 k 的工人中选择教育程度 e 的比例为 $\sigma_k(e)$，且 $\sigma_1(e)+\sigma_2(e)>0$（即两者中至少一个严格大于 0）。(i) 按照 Nash 均衡的定义，两家企业是否知道 $\sigma_k(e)$ 的值？(ii) 此时两家企业关于 e 处两类工人占比的信念取值如何？(iii) 序贯理性要求两家企业支付的工资率是多少，以及该工资率是否唯一（请详细说明理由）？

c. 考虑一个合并均衡 $e^*>0$。(i) 均衡工资是多少？(ii) 画图说明什么样的工资函数 $w(e)$ 能够让两类工人自愿选择 e^*。(iii) 给定任一满足条件的工资函数 $\hat{w}(e)$，请计算对应的信念系统 $\hat{\mu}(e)$。

d. 假设备选的 $N+1\geq 2$ 个教育程度为 $E=\{e_0,e_1,\ldots,e_N\}$；特别地，令 $e_0=e^*$。(i) 请说明，在任一序贯均衡中，均衡信念系统 $\mu(e)$ 对应的工资函数满足 $e\leq w(e)\leq 2e$。(ii) 若通过上述合并均衡点 e^* 的低生产率工人无差异与直线 $w=e$ 相交（不是相切），请说明 e^* 点不是序贯均衡。(iii) 假设 (ii) 中情况不出现，请详细说明 e^* 确实可以成为一个序贯均衡；为此，请构造恰当的完全混合策略和信念组序列 $(\sigma_1^\varepsilon,\sigma_2^\varepsilon,\{\mu^\varepsilon(e)\}_{e\in E})$，满足 $\sigma_k^\varepsilon(e)>0\ \forall e\in E$，使得当 $\varepsilon\to 0$ 时该序列收敛到均衡策略与信念组 $(\sigma_1,\sigma_2,\hat{\mu}(\cdot))$，其中 $\sigma_1(e^*)=\sigma_2(e^*)=1$，$\hat{\mu}(e^*)=\pi$。

e. 下面考虑分离均衡 $e_l\neq e_h$，即低生产率员工选择 e_l 而高生产率员工选择 e_h。(i) 请说明（用反证法）任何序贯均衡中 e_l 一定是 $\max_x u_1(x,x)$ 的解，即 e_l 一定是 1-类员工无差异曲线与低工资线 $w=e$ 的切点。(ii) 将过 e_l 的低生产率员工无差异曲线与 $w=2e$ 的交点记为 e_0，请说明序贯均衡中 $e_h\geq e_0$。(iii) 请画图说明什么样的工资曲线 $w(e)$，即信念系统 $\mu(e)$，可以保证 (e_l,e_h) 的确构成一个分离均衡？(iv) 请说明 Riley 结果 (e_l^*,e_h^*) 是唯一满足直观准则的分离均衡结果，其中 e_l^* 就是 (i) 中的 e_l，e_h^* 是 $\max_x u_2(2x,x)$ s.t. $x\geq e_0$ 的解；换言之，如果有另一个分离均衡 (e_l,e_h)，其中 $e_h\neq e_h^*$，则该均衡不满足直观准则。

f. **均衡的福利/效率性质** Spence 模型中可以定义 Pareto 有效配置。先定义可行配置：给定两类员工 N 个可能的教育选择 $E=\{e_1,\ldots,e_N\}$，以及每个 e_i 处对应的员工比例 $\mu(e_i)$，企业在 e_i 出支付的工资需满足 $w(e_i)\leq\mu(e_i)+(1-\mu(e_i))\cdot 2e$。（此处员工的教育选择也可写为 $\sigma_k(e_i)$，即选择每个教育程度的 k-类员工比例，再计算相应的 $\mu(e_i)$。）Pareto 有效配置：给定配置 $\{(e_i,\mu_i,w_i):i=1,\ldots,N\}$，不存在另一可行配置使得至少一类员工的效用严格增加而另一类员工的效用不变。(i) 如果通过 Riley 结果中 e_h^* 点的高生产率员工无差异曲线与高工资线 $w=2e$ 相切于 e_h^* 点，请说明对应的配置为 Pareto 最优。(ii) 如果通过 e_h^* 点的高生产率员工无差异与 $w=2e$ 相交（穿过到工资线下方），且 π 足够小使得平均工资线 $w=\pi e+2(1-\pi)e$ 与该无差异曲线相交（允许相切），请说明此时的 Riley 结果不是 Pareto 最优。