

武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期
博士生高级微观经济学课程第 7 次作业

提交日期：12 月 5 日

1. 产业组织的经典例子

a. Cournot 数量竞争

考虑两家企业，生产同质产品，成本函数为 cy_i , $i = 1, 2$ ，即两企业边际成本均为 $c > 0$ 。产品需求函数为 $d = D(p) = A - p$, $A > c$ ；相应的反需求函数为 $p = A - d$ 。两个企业采取数量竞争的形式。具体而言，若两个企业的产量决策为 y_1, y_2 ，则市场价格为 $p = A - y_1 - y_2$ 。Cournot 竞争中，两个企业同时选择产量水平。求解此时唯一的 Nash 均衡产量水平 y_1^c, y_2^c 。进一步的，比较 Cournot 均衡中总产出 $y^c = y_1^c + y_2^c$ 与垄断企业产量选择 y^m 的大小。

b. Stackelberg 数量竞争

继续考虑上述两家企业，但假设企业 1 首先选择产量 y_1 ，而企业 2 在观察到 y_1 之后选择产量 y_2 。求解此时唯一的 Nash 均衡产量水平 y_1^s, y_2^s ，并比较总产出 y^s 与 y^c, y^m 的关系。

c. Bertrand 价格竞争

最后考虑两个企业进行价格而非数量竞争。假设两个企业同时选择价格水平 p_1, p_2 。若 $p_i < p_j$ ，则 i 获得所有市场需求。此外，若两个企业出价相等 $p_1 = p_2$ ，则均分此时的市场需求。求证：该价格竞争博弈有唯一的 Nash 均衡 $p_1^b = p_2^b = c$ ，并比较对应的均衡产出 $y^b = y_1^b + y_2^b$ 与 y^m, y^c, y^s 的关系。

2. 混合策略 Nash 均衡

考虑如下 2×2 策略形式博弈（左、右数字是 P1、P2 的收益）

		P2	
		L	R
P1	U	$a, 0$	$0, b$
	D	$0, c$	$d, 0$

其中 a, b, d 和 d 均严格大于 0。

- a. 请说明该博弈只有唯一的混合策略 Nash 均衡 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ ，并计算之。
- b. 验证如下事实：给定对手 $-i$ 的策略 σ_{-i} ，则参与者 i 以严格正概率选择的任一纯策略都产生相同的收益。
- c. 上述结论在一般的有限正规形式博弈 $\Gamma = \langle I, (u_i, S_i)_{i \in I} \rangle$ 中也成立：给定所有 $S_i = \{1, \dots, S_i\}$ 为有限集，若 $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$ 是 Γ 的一个 Nash 均衡，则对任意的 i ，若 $\sigma_i(n), \sigma_i(m) > 0, n, m \in S_i$ ，且所有对手选择均衡策略 $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_I)$ 不变，那么 i 选择 n 时得到的期望效用等于选择 m 时得到的期望效用。试证明该结论。

3. 重复囚徒困境

无限次重复的囚徒困境博弈，单次博弈的支付矩阵如下：

		P2	
		否认	招供
P1	否认	$5, 5$	$0, 10$
	招供	$10, 0$	$2, 2$

两个囚徒的折现因子均为 $\delta \in [0, 1)$ 。

- a. 假设从某时刻 t 开始, P2 都选择否认指控, 计算此情况下 P1 也选择否认所得的折现收益。
- b. 假设某时刻 t , P2 选择招供但 P1 仍然选择否认, 而从此之后 P1 都选择招供以惩罚 P2,; 计算此情况下 P1 的折现收益。
- c. 当 δ 处于什么范围内, 两个囚徒都会在均衡中选择否认? 什么范围内两个囚徒都会选择招供呢?