武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期
博士生高级微观经济学课程第 5 次作业

提交日期：11 月 28 日

1. 最优风险分担

考虑一个不确定环境下的交换经济，包括 H 个家庭、一个基本商品，商品空间为 $X=\mathbb{R}_+$。该经济可能处于 S 个状态，每个状态发生的概率记为 $\pi_s>0$，$\sum_s \pi_s=1$。我们假设每个家庭 h 的偏好满足 von Neumann-Morgentern 期望效用理论，对应的 Bernoulli 效用函数为 $u_h(x)$；给定状态依存消费选择 $x=(x_s)_{s\in S}$，对应的期望效用为 $U_h(x)=\sum_s \pi_s u_h(x_s)$。每个家庭的状态依存禀赋记为 $e^h=(e_s^h)_{s\in S}$；各个状态下的总禀赋记为 $e_s=\sum_h e_s^h$。我们总假设每个家庭都是风险厌恶的（risk-averse），即 u_h 是凹函数。

a. 请证明 $U_h(x)$ 是 X^S 上的凹函数。

b. 假设 u_h 是一阶连续可微的。给定一组严格正的福利权重 $(\mu_1,\ldots,\mu_H)\in\mathbb{R}_{++}^H$，给定该经济的可行配置（feasible allocation）约束集

$$\mathcal{F}=\left\{(x^h)_{h\in H}: x_s^h\geq 0, \sum_h x_s^h\leq e_s, h\in H, s\in S\right\}.$$

首先请说明最优化问题 $\max_{(x^h)_h\in\mathcal{F}}\sum_h \mu_h U_h(x^h)$ 的解是一个 Pareto 最优配置。其次请写出最优化问题对应的 Lagrangian 函数及最优解对应的一阶必要条件；注意：请写出 $\mathcal{F}$ 中 **所有** 约束对应的乘子及 **所有**的一阶条件。请问这些一阶条件也是最优解的充分条件吗？（你可以参考 Simon and Blume 讨论约束最优化的相关章节。）

通常，我们称这样的 Pareto 最优配置为最优风险分担（optimal risk-sharing）配置。下面你将逐步了解为什么称其为最优风险分担配置。

c. 进一步假设 u_h 二阶连续可微，严格单调递增（上一问中我们并没有这样的假设!），并且满足 Inada 条件：$\lim_{x\to 0+}\mathrm{d}u_h(x)/\mathrm{d}x=+\infty$。请证明：

(1). 此时的 Pareto 最优配置一定是内点解（interior solution）而非角点解（corner solution），即最优解 $(x^h)_h$ 满足 $x_s^h>0$；

(2). 给定 s，最优解时每个家庭的加权边际效用 $\mu_h u_h'(x_s^h)$ 均相同；

(3). 给定 s，若每个家庭的权重相同，$\mu_h=1/H$，则每个家庭的 Pareto 最优消费水平 x_s^h 相同。更一般的，请证明此时 Pareto 最优消费与家庭各自的状态依存禀赋无关，亦即与个体风险（idiosyncratic risk）无关。

d. 考虑这个交换经济的 AD 均衡，并假设 (2)–(3) 中关于 u_h 的假设继续成立。简单起见，假设对所有家庭有 $e^h\gg 0$。

(1). 请证明：均衡配置都是内点解而非角点解。

(2). 假设经济中没有加总风险（aggregate risk），即 $e_1=\cdots=e_S$。假设所有家庭的 Bernoulli 效用函数为相同 CRRA 型

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, & \sigma>0,\sigma\neq 1;\\ \log(x), & \sigma=1.\end{cases}$$

验证该函数满足 Inada 条件并求解唯一的 AD 均衡。请说明均衡时所有家庭在不同状态下的消费均相同。

此时所有的个体收入（禀赋）风险都得到完全的保险或对冲。（若效用函数均为同样的 CARA 型，也可解出的结论。）

(3). 继续假设经济中没有加总风险。放宽 (b) 中假设为所有家庭具有同样但一般形式的效用函数 $u(x)$，请问 (2) 中得到的均衡还是这个一般的交换经济的 AD 均衡吗？均衡时完全的保险依然成立吗？

2. 不完全市场

考虑 Hart (1975) 的动态市场 RE 均衡的例子。假设 $H = K = S = 2$；两商品记为 x, y；两状态概率相等。每个家庭的效用只取决于 $t = 1$ 的消费，用下标表示 (x_{hs}, y_{hs})。家庭 1 在每个状态中的 von Neumann-Morgentern 效用为 $2^{5/2}x_{1s}^{1/2} + 2y_{1s}^{1/2}$，期望效用为

$$U_1 = 2^{3/2}x_{11}^{1/2} + y_{11}^{1/2} + 2^{3/2}x_{12}^{1/2} + y_{12}^{1/2}.$$

家庭 2 的状态效用为 $2x_{2s}^{1/2} + 2^{5/2}y_{2s}^{1/2}$，期望效用为

$$U_2 = x_{21}^{1/2} + 2^{3/2}y_{21}^{1/2} + x_{22}^{1/2} + 2^{3/2}y_{22}^{1/2}.$$

家庭 1 在状态 1、2 中的禀赋分别为 $e_{11} = (5/2, 50/21), e_{12} = (13/21, 1/2)$；家庭 2 在状态 1、2 中的禀赋分别为 $e_{21} = (1/2, 13/21), e_{22} = (50/21, 5/2)$。

a. 假设证券市场结构不完全导致每个家庭在两个状态之间转移的财富总量都是 0。分别求解此种情况下状态 1、2 对应的竞争均衡以及均衡效用。

b. 假设在 $t = 0$ 时存在所有状态依存商品的 AD 市场。求解此种情形下的 AD 均衡。计算两个家庭的均衡效用，并与上一问的结果进行比较。提示：此种情况是两家庭、四商品的交换均衡，直接求解会比较复杂。要注意使用家庭最优化一阶条件与市场出清条件化简待解方程；为此可证明 $x_{h1} = x_{h2}, y_{h1} = y_{h2}$，且 $\bar{p}_{x1} = \bar{p}_{x2}, \bar{p}_{y1} = \bar{p}_{y2}$。

c. 利用上问中解出的 AD 均衡，计算两个家庭在每个状态中的财富转移向量 $w_h = (w_{h1}, w_{h2})^\top$。考虑如下的证券市场结构

$$A_1 = [1, 0, 1, 0]^\top, \quad A_2 = [0, 1, 0, 1]^\top.$$

使用 (1)、(2) 中得到的 RE、AD 均衡价格向量计算 $A = [A_1, A_2]$ 对应的价值矩阵 V，并说明是否存在证券组合 $z_h = (z_{h1}, z_{h2})^\top$ 使得 $w_h = Vz_h$。再考虑如下的证券市场结构

$$A_1 = [1, 0, 2, 0]^\top, \quad A_2 = [0, 2, 0, 1]^\top.$$

重复前述计算与讨论，并验证此时 RE 均衡中的均衡证券组合 z_h 一定要满足 $Vz_h = [0, 0]^\top$。