武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期
博士生高级微观经济学课程第 4 次作业

提交日期：11 月 7 日

1. Edgeworth box

考虑一个两家庭、两商品的交换经济 $\mathscr{E}$。假设 $U^1(x,y)=x^\alpha y^{1-\alpha}$，$U^2(x,y)=x^\beta y^{1-\beta}$，$e^1=(3,1)$，$e^2=(1,3)$；其中 x 对应第一个商品。

a. 请计算 $\mathscr{E}$ 的竞争均衡 $\langle (p_x,p_y),(x^h,y^h)_{h=1,2}\rangle$。

b. 请计算 $\mathscr{E}$ 中契约曲线的表达式，即给定加总禀赋 $e^1+e^2=(4,4)$ 下所有的 Pareto 最优配置，以家庭 1 的权重 w 为表达式的自变量。化简家庭 1 的最优配置表达式 $(x(w),y(w))$，把 y 表示为 x 的函数。特别地，注意 $(x^1,y^1)=(0,0),(x^2,y^2)=(4,4)$ 或 $(x^1,y^1)=(4,4),(x^2,y^2)=(0,0)$ 都在契约曲线上。

c. 请验证竞争均衡配置在合约曲线上。

2. 均衡等价性

考虑两期动态随机经济 $t=0,1$；$t=1$ 时的随机状态空间记为 $S=\{1,\dots,S\}$；给定商品空间 $\mathbb{R}_+^{K(S+1)}$ 给定交换经济结构 $\mathscr{E}=(U^h,e^h)_{h\in H}$；假设 $U^h:\mathbb{R}_+^{K(S+1)}\to\mathbb{R}$ 关于 $t=1$ 的消费 $(x_s)_{s\in S}$ 为单调的，即：若 x,x' 满足 $x_0\geq x_0'$ 且对某一个 s 有 $x_s\gg x_s'$，则 $U^h(x)>U^h(x')$。

a. 考虑动态市场交易结构。假设存在一组完全的 Arrow 证券，即 $A=[A_1,\dots,A_S]=I$ 为单位矩阵。请证明：若存在理性预期（RE）均衡 $\langle p,q,(x^h,y^h)_{h\in H}\rangle$，满足 $(p_{11},\dots,p_{S1})\gg 0$，则存在 AD 价格向量 $\hat{p}$ 使得 $\langle \hat{p},(x^h)_{h\in H}\rangle$ 成为 AD 均衡。

(1). 为证明此结论，我们需要从 (p,q) 出发构造 AD 均衡的价格向量 $\hat{p}$，从而把动态市场结构下每个家庭面临的 $S+1$ 个预算约束合并为 1 个统一的 AD 预算约束。固定任意一个家庭 h；简便起见，略去其消费、证券选择的上标 h 而写作 (c,z)。注意到动态市场中两期共 $S+1$ 个预算约束是由证券投资组合 z 联系起来。以下步骤将提示你如何通过 z 把 $t=1$ 时的预算约束合并到 $t=0$ 期的约束中，从而形成单一的 AD 约束。

i. 该家庭在 $t=1$ 时的 S 个预算约束（忽略 $c_s\geq 0$）如下

$$\begin{gathered} p_1c_1\leq p_1e_1+p_{11}z_1,\\ \vdots\\ p_Sc_S\leq p_Se_S+p_{S1}z_S, \end{gathered}$$

其中 $c_s\in\mathbb{R}_+^K$ 为事件 s 中的消费选择，$e_s\in\mathbb{R}_+^K$ 为禀赋，$z=(z_1,\dots,z_s)^\top\in\mathbb{R}^S$ 为证券选择，均视为列向量；$p_s\in\mathbb{R}_+^K$ 为事件 s 中的即期价格，视为行向量；p_sc_s,p_se_s 均理解为矩阵乘积。定义财富转移（列）向量 $w=(w_1,\dots,w_S)^\top\in\mathbb{R}^S$ 如下：$w_s=p_s(c_s-e_s)$；定义对角矩阵 P 如下：其对角线上第 s 个元素为 p_{s1}。请说明上列 S 个约束可写作：$w\leq Pz$，或等价的 $P^{-1}w\leq z$，其中 $\leq$ 表示向量的小于等于。

ii. 类似于 i 中记号，说明 $t=0$ 的预算约束可以写作 $p_0c_0+qz\leq p_0e_0$。

iii. 接下来请证明如下结论：若 $\langle p,q,(x^h,y^h)_{h\in H}\rangle$ 是一个 RE 均衡，则 $q\gg 0$。注：利用效用函数的单调性。

iv. 请利用 iii 的结论 $q\gg 0$，并结合 i、ii 说明 $p_0c_0+qP^{-1}w\leq p_0e_0$。

v. 记 $1\times S$ 的行向量 $qP^{-1}=(v_1,\dots,v_S)$。请说明 $p_0c_0+qP^{-1}w\leq p_0e_0$ 可写成

$$p_0c_0+\textstyle\sum_{s=1}^S v_sp_sc_s\leq p_0e_0+\sum_{s=1}^S v_sp_se_s,$$

从而若定义 $1\times K(S+1)$ 行向量 $\hat{p}=(p_0,v_1p_1,\dots,v_Sp_S)$，则有 $\hat{p}c\leq\hat{p}e$（这里 c,e 视为 $K(S+1)$ 的列向量）。向量 $\hat{p}$ 即为所需构造的 AD 价格向量。

至此，我们不但构造了所需的 AD 价格向量 p，还证明了动态市场下的预算约束 $B(p,q)$ 与 AD 预算约束 $B(\hat{p})$ 等价：给定 $(c,z)\in B(p,q)$，则 $c\in B(\hat{p})$；反过来，若存在 $c\in B(\hat{p})$，则只需先计算 w，再定义 $z=P^{-1}w$，即可满足 $(c,z)\in B(p,q)$。

注：上述推导过程中最重要的是第 iii 步。本质上我们用到了无套利的思想。一般地，给定一组证券 $A=[A_1,\dots,A_M], M\le S$ 及一个证券价格向量 $q=(q_1,\dots,q_M)$。若存在投资组合 $y=(y_1,\dots,y_M)^\top$，使得 $qy\le 0$，$Ay>0$（向量大于 0）或者 $qy<0$，$Ay\ge 0$（向量大于等于 0），则称 (q,A) 组合存在套利机会。若不存在套利机会，则一定有 $r=(r_1,\dots,r_S)\gg 0$ 使得 $q=rA$。在任何一个 RE 均衡中，(q,A) 一定满足无套利条件。详见王江（2006）第 4 章或 MWG ch. 19, sec. E。

(2). 接下来请证明：对任一 $h\in H$，RE 均衡消费选择 x^h 在 AD 预算约束 $B^h(\hat{p})$ 上最大化 U^h。为此，你只需使用上一步的结论。

(3). 最后，请证明配置 $(x^h)_h$ 满足 AD 均衡的市场出清条件 $\sum_h x^h=\sum_h e^h$。

b. 同样考虑动态市场交易结构并假设证券市场是完全的，即 $A=[A_1,\dots,A_S]=I$ 为支付矩阵。请证明：若在 AD 市场结构下存在 AD 均衡 $\langle\hat{p},(x^h)_{h\in H}\rangle$，满足 $(\hat{p}_{11},\dots,\hat{p}_{S1})\gg 0$，则存在 RE 价格向量 (p,q) 及证券投资组合 $(y^h)_{h\in H}$ 使得 $\langle p,q,(x^h,y^h)_{h\in H}\rangle$ 为动态市场结构下的 RE 均衡。

(1). 首先，我们将从 $\hat{p}$ 出发构造 RE 价格向量 (p,q)。为此，不妨定义 $p=\hat{p}$，并仿照 a 中定义对角阵 P。进一步的定义 $q=\iota P$，$\iota=(1,\dots,1)$ 为 $1\times S$ 的行向量。

i. 请证明：若 $(c,z)\in B(p,q)$，则 $c\in B(\hat{p})$。你只需模仿 a 中的推导并注意到 $q=\iota P=(\hat{p}_{11},\dots,\hat{p}_{S1})\gg 0$。

ii. 请证明：若 $c\in B(\hat{p})$，则存在证券组合 z 使得 $(c,z)\in B(p,q)$。

至此，你证明了 AD 预算约束与动态市场预算约束等价。

(2). 请证明：对任意的家庭 $h\in H$ 及其 AD 均衡消费选择 x^h，存在证券投资选择 y^h，使得 (x^h,y^h) 在 $B^h(p,q)$ 上最大化 U^h。

(3). 请证明：配置 $(x^h,y^h)_{h\in H}$ 满足动态市场出清条件 $\sum_h x^h=\sum_h e^h$ 及 $\sum_h y^h=0$。为证后者，你只需注意到上一步中构造的投资组合 $y^h=P^{-1}w^h$，再使用 $t=1$ 的市场出清条件即可。

3. 理性预期均衡示例

考虑 H 个家庭的交换经济，包含一个基本商品，跨越两期 $t=0,1$ 且 $t=1$ 时有 S 个随机状态 $s\in\{1,\dots,S\}$，各状态的概率为 $\pi_s\ \forall s\in S$。家庭在 $t=0$ 时初始禀赋均为 $e_0^h=\bar{y}/H>0$，并进行 S 只 Arrow 证券的交易；在 $t=1$ 时 h 在状态 s 中得到的禀赋向量为 e_s^h，且对任意状态 $s\in S$，有

$$\sum_{h\in H} e_s^h=\bar{y}>0 \tag{1}$$

为常数，即加总禀赋在所有状态中均相等。家庭的偏好符合期望效用形式，各期、各状态的 Bernoulli 效用函数为连续可微严格凹函数 $u_h(x)$，故期望效用函数为 $u_h(x_0^h)+\sum_{s\in S}\pi_s u_h(x_s^h)$。

a. 证明：无论个人禀赋 e_s^h 如何依 s 随机变动，只要总禀赋满足 (1) 式，则 REE 中的均衡配置一定满足 $x_1^h=\cdots=x_S^h$，即均衡时各家庭消费在所有状态均相同。这一结论需要假设 $u_1=u_2$ 吗？提示：使用 REE 和 ADE 的等价性，通过 ADE 来直接求均衡消费配置。在求解 ADE 时，将 $t=1$ 的价格写为 $\pi_1p_1,\dots,\pi_Sp_S$ 形式。

b. 确定 ADE 中的均衡价格 $p_0,p_s,s=1,\dots,S$，进而求解均衡消费配置 $x_0^h,x_s^h,s=1,\dots,S$。

c. 写出动态市场下各家庭的预算约束，并写出家庭消费、资产配置所应满足的一阶条件。给出 REE 均衡时每个人的 Arrow 证券投资组合 y_h（表示为均衡消费的函数），并给出每只 Arrow 证券的价格表达式。这些价格和 π_s 有什么关系？