武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期

博士生高级微观经济学课程第 3 次作业

提交日期：10 月 24 日

1. 预算约束对应

给定 2-维商品空间 $X = \mathbb{R}^2_+$ 及初始禀赋 $e \geq 0$，预算约束对应为 $p \in \Delta \rightrightarrows B(p) = \{x \in X : p \cdot x \leq p \cdot e\}$。

a. 证明：(i) $B(p)$ 为上半连续对应；(ii) 当 $e \gg 0$ 时 $B(p)$ 为下半连续对应。并举例说明当 $e \geq 0$ 时，$B(p)$ 未必下半连续。

b. 考虑效用函数 $u(x, y) = x + y$，并以 $(p_0, 1 - p_0)$ 记价格向量 p，$p_0 \in [0, 1]$。假设 $e = (1, 1)$，求解需求对应 $D(p_0)$，并尝试在 (p_0, x, y) 3-维坐标系中画出 $D(p_0)$。

2. 需求函数

设商品空间 $X \subset \mathbb{R}^K_+$ 为闭凸集，$\succsim$ 为 X 上连续、凸的偏好，$e \gg 0$ 为初始禀赋。

a. 假设效用函数 $U : X \to \mathbb{R}$ 为偏好 $\succsim$ 的一个表示，$D(p)$ 为效用最大化问题 $\max_{x \in B(p)} U(x)$ 的解，即需求对应。请证明，对于任一严格递增的函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$\succsim$ 的等价效用函数表示 $f \circ U$ 对应的需求对应仍为 $D(p)$。

b. 考虑 $X = \mathbb{R}^K_+$ 上的 Cobb-Douglas 效用函数 $U(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_K^{\alpha_K}$，$\alpha_1 + \cdots + \alpha_K = 1$，$\alpha_i \geq 0$。价格向量记为 $p \in \Delta$，初始资产记为 w 且 $w > 0$，求解 Marshallian 需求函数 $D(p, w)$：

$$\max_{x \in X} U(x) \quad \text{s.t.} \quad p \cdot x \leq w.$$

c. 沿用上问记号，对下列效用函数求解 Marshallian 需求函数：(i) $U(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_K^{\alpha_K}$，$\alpha_i \geq 0$；(ii) $U(x) = \alpha_1 \log x_1 + \cdots + \alpha_K \log x_K$，$\alpha_i \geq 0$。

d. 进一步扩展上述分析，给定价格序列 $\{p_t\}$，考虑无穷期消费组合效用最大化问题：

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \log c_t, \quad \text{s.t.} \quad \sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t \leq w.$$

e. 考虑 2-维字典序（lexicographic）偏好：$X = \mathbb{R}^K_+$，$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_2)$ 当且仅当 $x_1 \geq x_2$ 或当 $x_1 = x_2$ 时，$y_1 \geq y_2$。请说明 $\succsim$ 不是连续偏好；同时给定价格 p 和初始资产 w，求解 Marshallian 需求函数 $D(p, w)$。

3. 竞争均衡的福利性质

a. 记商品空间为 $X = \mathbb{R}^K_+$，考虑一个交换经济 $\mathscr{E} = (U^h, e^h)_{h \in H}$。请证明：若对所有的 $h \in H$，U^h 都是单调的，则 $\mathscr{E}$ 的任意一个竞争均衡配置都是 Pareto 最优配置。

b. 对一般生产经济 $\mathscr{E} = \big((U^h, e^h, \theta^h)_{h \in H}, (Y^j)_{j \in J}\big)$ 定义可行配置，并证明竞争均衡配置的 Pareto 最优性质。