武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期

博士生高级微观经济学课程第 2 次作业

提交日期：10 月 10 日

1. 凸集的性质

   a. 假设 $\{X_n\}$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的一列凸集，且 $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ 不是空集，则 Y 也是一个凸集。

   b. 对 $\mathbb{R}^k$ 中的两个集合 A, B，定义集合 $C = \{z \in R^k : z = x + y, x \in A, y \in B\}$，记为 $A + B$。证明：若 A, B 为凸集，则 $C = A + B$ 也为凸集。

   c. 设 A, B 为 $\mathbb{R}^k$ 中的紧集，请证明 $C = A + B$ 也是紧集。提示：关键在于说明 C 是闭集。

   d. 考虑下面两个集合：

   $$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 1/x\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq -1/x\}.$$

   首先说明 A, B 均为闭集。其次，请说明 $A + B$ 是否为闭集，并给出论证。你的结论与 c 问有何联系？

2. 凹函数的连续性

   a. 假设 f 为 $\mathbb{R}^1$ 中凸集 D 上的凹函数。给定 D 上的三个点 $u < x < v$，请证明

   $$\begin{cases} [f(v) - f(x)]\frac{y-x}{v-x} \leq f(y) - f(x) \leq [f(x) - f(u)]\frac{y-x}{x-u}, & \text{if } x < y < v, \\ [f(x) - f(u)]\frac{y-x}{x-u} \leq f(y) - f(x) \leq [f(v) - f(x)]\frac{y-x}{v-x}, & \text{if } u < y < x. \end{cases}$$

   由上列不等式，说明 f 在 x 处连续。

   b. 利用类似的想法，可以证明定义在 $\mathbb{R}^k$ 中凸集 D 上的凹函数 f 在 D 的内部为连续函数；D 的内部定义为 $\{x \in D : \text{存在}\epsilon > 0 \text{ s.t. } B(x, \epsilon) \subset D\}$。阅读 Kreps (2013) Proposition A3.17 及 g 部分的证明；仿照该证明，对定义域为 2-维凸集 D 上的凹函数，说明其如何证明其连续性，并画图说明 Kreps 证明中两组利用凹函数定义得到的不等式为何成立。

3. 凹函数的极值性质

定义：函数 $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in D$ 处达到局部极大值，如果存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x_0) \geq f(x)$ 对所有 $x \in B_\delta(x_0) \cap D$ 成立，即存在 x_0 的一个领域使得 $f(x_0)$ 大于等于该领域内所有点的函数值。请证明：(i) 对在凸集 $D \subset \mathbb{R}^k$ 上的凹函数 $f : D \to \mathbb{R}$，若 $x_0 \in D$ 是 f 的局部极大值点，则 x_0 也是 f 的最大值点；(ii) 若 f 严格凹，则局部极大值点 x_0 也是唯一的最大值点。

4. 多元函数可微性

考虑 2-元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

请回答下列问题：

   a. 请计算偏导数 $\partial_x f$ 和 $\partial_y f$，并说明 f 在 $(0, 0)$ 点处各个方向导数均存在。注意：区分 $x = 0$ 与 $y = 0$ 等情况。

   b. 请说明上述两个偏导数在 $(0, 0)$ 点的连续性。

   c. 请说明 f 在 $(0, 0)$ 点的连续性。

5. 二阶导数交换次序

考虑 2-元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

回答下列问题：

a. 请说明 f 在 $(0,0)$ 的连续性。

b. 请计算 $\partial_x f$ 与 $\partial_y f$，并说明其在 $(0,0)$ 的连续性。

c. 对 $(x,y)\neq(0,0)$，计算 $\partial_{xy}f$ 与 $\partial_{yx}f$，从而说明 $\partial_{xy}f(0,0)\neq\partial_{yx}f(0,0)$。

d. 请说明 $\partial_{xy}f$ 与 $\partial_{yx}f$ 在 $(0,0)$ 处的连续性。

6. 凹性与二阶导数

a. 请证明 $f(x,y)=[\alpha x^{1-\epsilon}+(1-\alpha)y^{1-\epsilon}]^{1/(1-\epsilon)}$，$0<\alpha<1$，$\epsilon>0$ 且 $\epsilon\neq1$，是 $\mathbb{R}_+^2$ 上的严格凹函数。提示：计算 f 的 Hessian 矩阵，判别矩阵的正、负定情况。

b. 固定 $x,y>0$，请证明当 $\epsilon\to1$ 时，上问中的函数值 $f(x,y)$ 收敛到 $x^\alpha y^{1-\alpha}$。