武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期

博士生高级微观经济学课程第 11 次作业

提交日期：1 月 2 日

1. 最优激励合约

假设 $F(q|a)$ 关于 a 满足一阶随机占优。最优激励合约（即次优合约，second best contract）满足如下关于 $w(p)$ 的一阶条件

$$\frac{V'(q-w(q))}{u'(w(q))}=\lambda+\mu\frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}.$$

a. 比较 $w(q)$ 与最优合约（first best contract）$w_*(q)$ 的大小关系。

b. 假设密度函数 $f(q|a)$ 处处大于 0，关于 q,a 2-阶连续可微，且 $f_a(q|a)/f(q|a)$ 关于 q 递增（不恒为常数）。请证明：当 $p>r$ 且 $a>b$ 时，有下述不等式

$$\frac{f(p|a)}{f(p|b)}>\frac{f(r|a)}{f(r|b)}$$

成立。该式称为单调似然比（monotone likelihood ratio，MLR）性质：更高的观测值 p 意味着高低状态 a,b 之间更高的似然比。

c. 选做题从 MLR 出发，证明当 $a>b$ 时，$F(q|a)<F(q|b)$；换言之，MLR 意味着一阶随机占优；可参考 Milgrom (1981, BJE)。

d. 假设 $f(q|a)$ 满足 MLR，讨论此时 $w(q)$ 和 $w_*(q)$ 的大小关系。

2. 激励合约示例

本题基于 Holmström (1979) sec. 2 的例子 p. 79。假设 $V(q-w)=q-w$，$u(w)=2\sqrt{w}$，$\phi(a)=a^2$；给定 $a>0$，产出 $q\in[0,\infty)$ 满足指数分布 $\exp(1/a)$，其密度函数为 $f(q|a)=\frac{1}{a}e^{-q/a}$，分布函数为 $F(q|a)=1-e^{-q/a}$，$q\geq 0$。激励合约设计问题的原初形式 (P*) 和一阶方法形式 (P)。

a. 请验证 $\mathbb{E}q=a,\mathbb{E}q^2=2a^2,\mathrm{var}q=a^2$。

b. 对于委托人最优化问题 (P)，请推导关于 $w(q)$ 的一阶条件，并验证激励合约满足

$$w(q)=\left(\lambda+\mu\frac{q-a}{a^2}\right)^2.$$

c. 请计算 (P) 中一阶形式激励约束

$$\int_0^\infty u(w(q))f_a(q|a)\mathrm{d}q=\phi'(a)$$

左端的积分并验证 $\mu=a^3$。一个简单的方法是使用分部积分并注意利用 (1) 中的结论。

d. 请验证当 $w(q)$ 为 (4) 中形式时，代理人效用函数（作为 a 的函数）

$$\int_0^\infty u(w(q))f(q|a)\mathrm{d}q-\phi(a)$$

是一个严格凹函数；再说明由 (P) 中一阶形式激励约束确定的代理人最优选择 a 是给定 $w(q)$ 下的全局最大值点，从而 (P) 与 (P*) 等价。

e. 请验证委托人问题 (P) 中关于 a 的一阶最优条件满足

$$\int_0^\infty V(q-w(q))f_a(q|a)\mathrm{d}q+\mu\left[\int_0^\infty u(w(q))f_{aa}(q|a)\mathrm{d}q-\phi''(a)\right]=0.$$

请上式中的两个积分，并验证 $4a^3+2\lambda a=1$。(5) 中的提示同样适用。

f. 当保留效用（reservation utility）$\bar{u} \geq 0$ 时，请由 (6) 验证最优解对应的 $\lambda > 0$。假设 $\bar{u} = \frac{3}{4}$，请求解相应的 λ, μ, a 以及 $w(q)$。

g. 计算上述问题对应的第一最优合约 $w_*(q)$，并讨论 $w_*(q)$ 和 $w(q)$ 的关系。验证 $f(q|a)$ 满足 MLR 性质；第一题 4 中的结论在此例中成立吗？