武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期

博士生高级微观经济学课程第 10 次作业

提交日期：12 月 26 日

1. LP 模型

考虑课件中的 Leland-Pyle 模型。

a. 请验证下列逻辑关系

$$\frac{p_G(1-\bar{p})}{\bar{p}(1-p_G)} > \frac{u'(0)}{u'(C^H)} \Leftrightarrow \partial_\alpha U(1, \bar{p}C^H|p_G) > 0 \Rightarrow \partial_\alpha U(\alpha, \bar{p}C^H|p_G) > 0,\ \forall \alpha.$$

b. 请验证下列不等式 $\partial_\alpha U(\alpha, p_B C^H|p_G) > 0, \partial_\alpha U(\alpha, p_G C^H|p_G) < 0, \partial_\alpha U(\alpha, p_G C^H|p_B) < 0,\ \forall \alpha$，以及 $U(0, p_G C^H|p_B) > U(0, p_B C^H|p_B) > U(1, p_G C^H|p_B)$。

c. 请证明唯一满足直观准则的分离均衡为 $\alpha_G = \alpha^*, \alpha_B = 0$。

2. 一阶、二阶随机占优

给定两个 $\mathbb{R}$ 上的累计概率分布函数 $F(x)$ 和 $G(x)$，定义：

i. F 一阶随机占优 G，如果 $F(x) \le G(x)\ \forall x$；

ii. F 二阶随机占优 G，如果 $\int_{-\infty}^{x} F(y)\mathrm{d}y \le \int_{-\infty}^{x} G(y)\mathrm{d}y\ \forall x$。

回答下列问题。

a. 证明：一阶随机占优意味着二阶随机占优。

b. 考虑两个随机变量 $X_i \sim N(0, \sigma_i^2),\ i = 1, 2$，且 $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$。请证明 X_1 二阶随机占优 X_2，但 X_1 并不一阶随机占优 X_2。

3. 均值保存扩散 (mean preserving spread)

参考 Rothschild & Stiglitz (1971)。给定取值在 $[0,1]$ 上的两个随机变量 X 和 Y，分布函数分别为 F 和 G。考察下面三个 $[0,1]$ 上分布函数偏序关系的定义：

i. 称 $F \precsim_u G$，若对 $[0,1]$ 上的任意凹函数 U 有不等式 $\int_0^1 U(x)\mathrm{d}F(x) \ge \int_0^1 U(x)\mathrm{d}G(x)$ 成立；

ii. 称 $F \precsim_i G$，若对任意 $y \in [0,1]$ 有 $\int_0^y [G(x) - F(x)]\mathrm{d}x \ge 0$ 且 $\int_0^1 [G(x) - F(x)]\mathrm{d}x = 0$；

iii. 称 $F \precsim_m G$，若存在随机变量 Z 满足 $\mathbb{E}(Z|X) = 0$ 且 $Y = X + Z$。

请证明下述结论：

a. 上述关系中 (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2)。

b. 利用性质 (a) 证明 $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$。

注 1：Rothschild & Stiglitz 还证明了 (2) $\Rightarrow$ (3)，从而上述三个序关系定义等价，RS 称此序关系为递增风险（increasing risk），文献中更常用的名称为 mean preserving spread。由 (2) 到 (3) 的蕴含关系证明比较复杂，RS 使用了离散逼近的技巧。利用性质 (2) 的最后一个等式也可以直接证明 $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$。

注 2：与 RS 递增风险密切联系的是 Hadar & Russell (1969 *AER*, 1971 *JET*) 中定义的 2-阶随机占优（second degree stochastic dominance，SDSD）：

$$F \precsim_{2i} G \quad \text{if} \quad \int_0^y [G(x) - F(x)]\mathrm{d}x \ge 0, \quad \forall\, y \in [0,1].$$

这一概念是广泛运用的 2-阶随机占优（second order stochastic dominance，SOSD）的最初形式，其与 (b) 中 $\precsim_i$ 的差别在于不要求 $y=1$ 时等号严格成立。HR 证明了 SDSD 与下述性质等价：$F \precsim_{2u} G$，若对 $[0,1]$ 上任意的 2-阶连续可微、单调递增、凹函数 U 有不等式 $\int_0^1 U(x)\mathrm{d}F(x) \geq \int_0^1 U(x)\mathrm{d}G(x)$ 成立。直觉上看，$\precsim_{2u}$ 和 $\precsim_{2i}$ 的等价性应该对所有递增的凹函数成立（不需要 U 满足 2-阶连续可微）。

注 3：运用 SDSD 的定义可以证明 $\mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y$，并且当 $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ 时，$\mathrm{Var}X \leq \mathrm{Var}Y$。

4. Stiglitz-Weiss 模型

阅读 Stiglitz & Weiss (1981) 和 Arnold & Riley (2009)。

a. 请证明：$\mathbb{E}[\pi(R,r)|\theta] \uparrow \theta, \hat{\theta}(r) \uparrow r, \tilde{\rho}(\theta,r) = \mathbb{E}[\rho(R,r)|\theta] \downarrow \theta$。

b. 请验证下列导数表达式：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}r} = -\frac{g(\hat{\theta})}{1-G(\hat{\theta})}(\hat{\rho}-\bar{\rho})\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{1-G(\hat{\theta})}\int_{\hat{\theta}}^{\infty}[1-F((1+r)B-C,\theta)]\mathrm{d}G(\theta),$$

并讨论 $\hat{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 的大小关系。