# 武汉大学经管学院金融系 2017 秋季学期

# 博士生高级微观经济学课程第 1 次作业

提交日期：9 月 26 日

1. 欧式模

首先证明 Cauchy-Schwartz 不等式：$x \cdot y \leq ||x||||y||$，$\forall x, y \in \mathbb{R}^k$。再证明：$\mathbb{R}^k$ 中的欧式模函数 $||\cdot||$ 满足三角不等式 $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$。

2. 集合的交与并

a. 设 $X_n \subset \mathbb{R}^k$，$n = 1, \ldots, \infty$，为开集。求证：$\cup_{n=1}^{\infty} X_n$ 为开集。

b. 设 $X_n \subset \mathbb{R}^k$，$n = 1, \ldots, \infty$，为闭集。求证：$\cap_{n=1}^{\infty} X_n$ 为闭集。

c. 举例说明：(i) 若 $X_n \subset \mathbb{R}^k$，$n = 1, \ldots, \infty$，为开集，$\cap_{n=1}^{\infty} X_n$ 不一定为开集；(ii) 若 $X_n \subset \mathbb{R}^k$，$n = 1, \ldots, \infty$，为闭集，$\cup_{n=1}^{\infty} X_n$ 不一定为闭集。

3. 闭集的性质

设 $X \subset \mathbb{R}^k$ 是一个非空集合。

a. 请证明：$X$ 是一个闭集当且仅当 $X$ 中任一收敛点列的极限也属于 $X$。

b. 请证明：若 $X$ 中任一收敛点列的极限也属于 $X$，则 $X$ 是闭集。

4. 紧集的性质

a. 给定 $\mathbb{R}^k$ 中非空子集 $X$，请证明：若其中任意点列均有收敛子列且极限也属于 $X$，则 $X$ 是紧集。

b. 请说明 Cantor 集是紧集。