

金融学 2024 年秋 · 时间序列

第 8 讲：自回归模型的统计推断

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 10 月 21 日

本讲内容

- 1 线性回归模型的推断
- 2 AR 系数的推断

本节内容

① 线性回归模型的推断

② AR 系数的推断

线性回归 OLS 估计的大样本理论

- 考虑多元回归模型

$$Y_t = \sum_{k=1}^K \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t = \mathbf{X}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

其中 X_{1t} 可以为 1, 代表常数项

- 矩阵形式为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- $\boldsymbol{\beta}$ 的 OLS 估计为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_T = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$$

- 对 $H_0: \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$ 等类假设进行推断, 需要知道 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_T$ 的渐近分布

OLS 估计系数的注记

- OLS 估计系数 $\hat{\beta}_T$ 是样本 $\mathcal{X} = \{Y_t, X_t\}$ 的一个函数，因此当 \mathcal{X} 作为随机变量时， $\hat{\beta}_T$ 也是一个随机变量
- 但当样本 \mathcal{X} 给定，即样本为其实现值 $\{y_t, x_t\}$ 时，相应的估计系数有确定取值，非随机，此时通常将 OLS 估计值写为 b_T
- $\hat{\beta}_T$ 是一个随机变量，需要进一步确定其分布，而 b_T 是这个随机变量的实现值

大样本的意义

- 大样本 (large sample) 时，概率极限理论可以直接确定估计量 $\hat{\beta}_T$ 的 渐近分布 (asymptotic distribution)
 - 大数定律和中心极限定理
 - 后者的实质：标准化样本均值的分布收敛到标准正态分布
- 小样本时，只有在很强的假设之下，才有可能得到 $\hat{\beta}_T$ 的分布，从而实现相关统计推断
 - 如残差项 ε_t 是正态分布

线性回归 OLS 估计系数的渐近分布

- 已知系数估计量 $\hat{\beta}_T \xrightarrow{\text{a.s.}} \beta_0$, 且

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\hat{\beta}_T &= \beta_0 + \mathbb{E}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon \\ &= \beta_0 + \mathbb{E}\{\mathbb{E}[(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon | \mathbf{X}]\} \\ &= \beta_0 + \mathbb{E}\{(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbb{E}[\varepsilon | \mathbf{X}]\} = \beta_0\end{aligned}$$

- 通常而言 $\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta_0)$ 收敛到一个多元正态分布
- ⇒ 中心极限定理 (central limit theorem)

中心极限定理 (central limit theorem, CLT)

- 考虑 iid 样本 $\{X_t\}$, 期望为 μ_X , 方差为 σ_X^2
- 由大数定律, $\hat{\mu}_{X,T} - \mu_X = T^{-1} \sum_t (X_t - \mu_X) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$
- 计算可得, $\text{var}(\hat{\mu}_{X,T}) = \sigma_X^2/T$, 故 $\hat{\mu}_{X,T}$ 的标准化

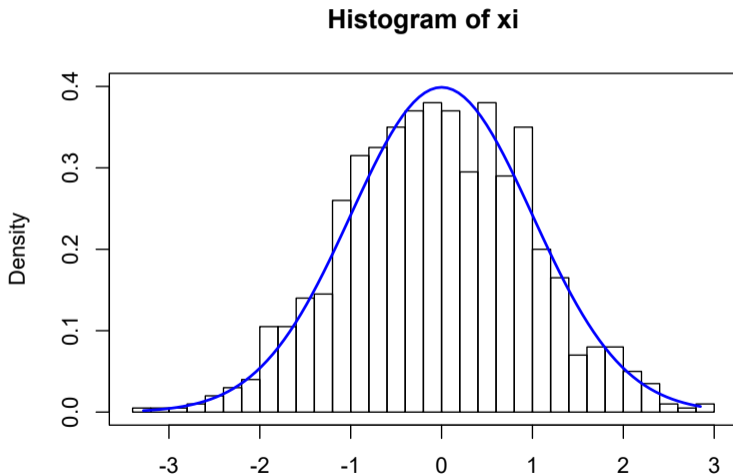
$$\xi_T = \frac{\hat{\mu}_{X,T} - \mu_X}{\sqrt{\text{var}(\hat{\mu}_{X,T})}} = \frac{T^{-1} \sum_t (X_t - \mu_X)}{\sqrt{T}^{-1} \sigma_X} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t \frac{X_t - \mu_X}{\sigma_X}$$

方差为 1

定理 1 (iid 序列 CLT: 1-元情形)

假设有 iid 序列 $\{X_t\}$, 则其标准化样本均值 $\xi_T \xrightarrow{d} N(0, 1)$, 或等价的, $\sqrt{T}(\hat{\mu}_{X,T} - \mu_X) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_X^2)$

CLT: Monte Carlo 模拟示例



多元情形下的中心极限定理

定理 2 (iid 序列 CLT: 多元情形)

假设有 iid 向量序列 $\{X_t\}$, 期望向量为 μ , 协方差矩阵为 Σ , 则其样本均值向量有如下极限分布

$$\sqrt{T}(\hat{\mu}_{X,T} - \mu_X) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$$

- 多元情形下仍然可以定义标准化样本均值: 当 Σ 可逆时,

$$\xi_T = \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \Sigma^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (\hat{\mu}_{X,T} - \mu_X)$$

协方差矩阵补充性质

- 协方差阵 $\Sigma_{n \times n}$ 为半正定对称阵，故特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ ，且存在矩阵 C 满足 $C^{-1} = C^T$ ，使得 Σ 可对角化为

$$\Sigma = C \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) C^{-1}$$

其中 diag 表示由给定数组构造对角矩阵

- 此时有

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

- 定义 $\Sigma^{\frac{1}{2}} = C \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) C^{-1}$ ，仍为半正定对称阵，满足 $\Sigma = \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}}$

一般情况下的中心极限定理

- 上述定理 1/2 要求 iid 假设；应用中，iid 假设不一定满足
 - 仔细观察可见，iid 假设“形式”上主要用于确定样本均值的协方差矩阵；而这一步骤，主要依赖于不同期变量相关性为 0 这一事实
 - 如果只假设序列不相关，无法保证极限分布存在
- ⇒ 弱于 iid 而强于不相关的假设为：鞅差序列 (martingale difference series)
- Ω_t 表示 t 时信息集； $\mathbb{E}[X_{t+1}|\Omega_t]$ 表示对当期信息的条件期望 (conditional expectation)
 - 给定 $\{\Omega_t\}$ ， $\{X_t\}$ 称为鞅差序列，若 $\mathbb{E}[X_{t+1}|\Omega_t] = 0$
 - 前述中心极限定理在鞅差序列假设下均成立！

线性回归 OLS 估计系数的统计推断

- 为分析 $\hat{\beta}_T$ 的渐近分布, 考虑

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta_0) = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^\top \right)^{-1} \underbrace{\sqrt{T} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t \varepsilon_t}_{\text{视作样本均值}}$$

- 注意 $\mathbb{E}[\mathbf{X}_t \varepsilon_t \cdot \varepsilon_t \mathbf{X}_t^\top] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^\top | \mathbf{X}_t] = \sigma_\varepsilon^2 \mathbb{E}[\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^\top] = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{M}$
- 在 OLS 常用假设下, 及 $\mathbf{X}_t \varepsilon_t$ 鞅差序列假设下, 由 CLT 可得

$$\sqrt{T} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t \varepsilon_t \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{M})$$

- 再由 $T^{-1} \sum_t \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^\top \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{M}$ 可得: $\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{M}^{-1})$

回归系数渐近分布的样本估计

- 总体分布未知，故 σ_ε^2 与 M 均需从样本 $\{Y, X\}$ 进行估计
- $\{X_t\}$ 平稳，LLN $\Rightarrow \hat{M}_T \equiv T^{-1} \sum_t X_t X_t^\top \xrightarrow{\text{a.s.}} M$
- 由 $\hat{\beta}_T$ 的一致性，可知样本残差

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - X_t^\top \hat{\beta}_T$$

是 ε_t 的一致估计，LLN $\Rightarrow \hat{\sigma}_{\varepsilon, T}^2 \equiv T^{-1} \sum_t \hat{\varepsilon}_t^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma_\varepsilon^2$

- 有限样本下， $\hat{\sigma}_{\varepsilon, T}^2$ 有偏差更小的无偏估计量
- 结合这两方面，可知

$$\hat{\beta}_T - \beta_0 \sim N\left(\mathbf{0}, \frac{1}{T} \hat{\sigma}_{\varepsilon, T}^2 \hat{M}_T^{-1}\right)$$

单系数假设检验

- $H_0: \hat{\beta}_{k,T} - \beta_{k,0} = 0 \Rightarrow$ 标准 t -检验

$$\xi_T = \frac{\hat{\beta}_{k,T} - \beta_{k,0}}{\sigma(\hat{\beta}_{k,T})}$$

- 其中 $\sigma(\hat{\beta}_{k,T})$ 表示 $\hat{\beta}_{k,T}$ 的**标准误** (standard error), 对应矩阵

$$\frac{1}{T} \hat{\sigma}_{\varepsilon,T}^2 \hat{\mathbf{M}}_T^{-1}$$

对角线上第 k 个元素的平方根

- 给定 $\hat{\beta}_{k,T}$ 与 $\hat{\sigma}_{\varepsilon,T}^2 \hat{\mathbf{M}}_T^{-1}$ 收敛, 则 T 越大, 标准误越小, 从而检验的显著性水平越高, p -值越小

系数检验的进一步说明

- ξ_T 是做为随机变量的样本 $\{Y_t, X_t\}$ 的函数，因此也是**随机变量**
- 确定了 OLS 估计量 $\hat{\beta}_{k,T}$ 及相应的 ξ_T 的分布后，即可以根据作为实现值的样本取值 $\{y_t, x_t\}$ 来计算 $\hat{\beta}_{k,T}$ 的实际取值 $\hat{b}_{k,T}$ ，进而计算 t -统计量 ξ_T 的实际取值

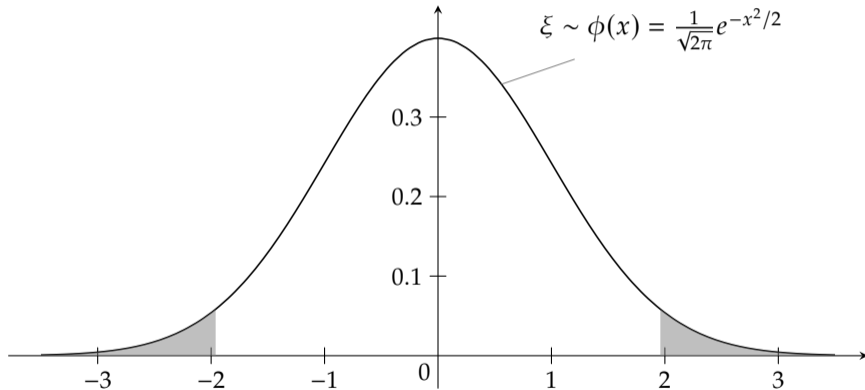
$$\bar{\xi}_T = \frac{\hat{b}_{k,T} - \beta_{k,0}}{\sigma(\hat{\beta}_{k,T})}$$

- 回归系数 $\hat{\beta}_{k,T}$ 关于原假设 $\beta_{k,0}$ 检验的 p -值为如下双尾概率

$$\mathbb{P}(|\xi_T| \geq |\bar{\xi}_T|)$$

t -检验：统计量分布、显著性水平、 p -值与拒绝域

$\alpha = 5\%$, 临界 $\bar{\xi}_\alpha \approx 1.96$, 拒绝域 (灰色区域) 概率为 $\alpha = 0.5$



3- σ 原则: $\hat{\beta}$ 与 β_0 相差 2 倍标准误则 p -值小于 5%

给定 $\xi \sim N(\mu, \sigma)$, 则有

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\xi - \mu|}{\sigma} \leq 1\right) \approx 78.2\%$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\xi - \mu|}{\sigma} \leq 2\right) \approx 95.4\%$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\xi - \mu|}{\sigma} \leq 3\right) \approx 99.6\%$$

多系数联合检验

- 考虑 $H_0: \beta_i - \beta_j = 0$, 即第 i 和 j 个回归系数相等
 - \Rightarrow 只需从渐近分布中提取出 $\hat{\beta}_{i,T}, \hat{\beta}_{j,T}$ 的联合分布
 - 考虑矩阵 (行向量)

$$\mathbf{R} = [\dots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{th}}}, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{j^{\text{th}}}, 0, \dots],$$

$$\text{则 } \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_T = \hat{\beta}_{i,T} - \hat{\beta}_{j,T} \sim N\left(0, \underbrace{\frac{1}{T}\hat{\sigma}_{\varepsilon,T}^2 \mathbf{R}\hat{\mathbf{M}}_T^{-1}\mathbf{R}^\top}_{1 \times 1}\right)$$

多系数联合检验

- 一般情况，多系数线性联合假设检验，可引入线性约束矩阵 (linear restriction matrix) $R_{L \times K}$ 及约束目标向量 $r_{L \times 1}$ ：

$$H_0 : R\beta = r \quad \Leftrightarrow \quad H_0 : R\beta - r = \mathbf{0}_{L \times 1}$$

此时，检验统计（向）量 $\xi_T = R\hat{\beta}_T - r$ 的渐近分布近似等于

$$N\left(\mathbf{0}, \frac{1}{T} \hat{\sigma}_{\varepsilon, T}^2 R \hat{M}_T^{-1} R^\top\right)$$

- $L \leq K$ ，最多同时检验所有 K 个回归系数的取值
- 如何检验？ \Rightarrow 将 ξ_T 变形为 χ^2 -分布

χ^2 -分布与正态分布的关系

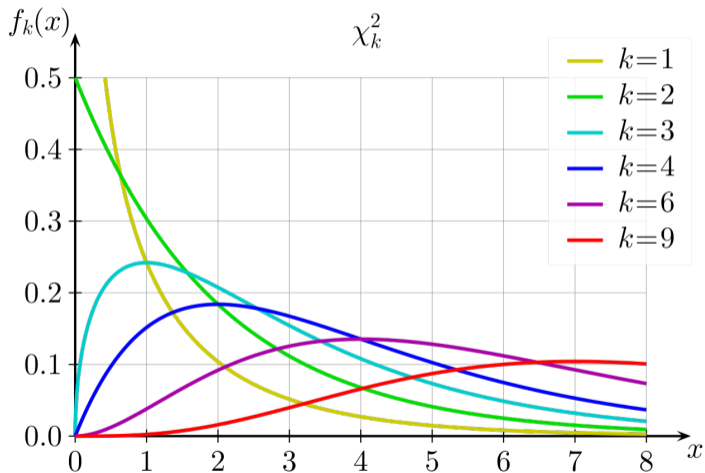
- 给定 L 个独立标准正态 r.v. X_1, \dots, X_L , 平方和 $Y = \sum_{\ell} X_{\ell}^2$ 的分布称做自由度为 L 的 χ^2 -分布 (χ^2 -dist. with the degree of freedom of L), 记做 $\chi^2(L)$

- PDF 如下

$$\frac{1}{2^{L/2}\Gamma(L/2)} x^{L/2-1} e^{-x/2}$$

- χ^2 -分布是一种特殊的 Γ -分布
- 取值范围为 $(0, +\infty)$
- 若 $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_L]^T \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$, 则 $\Sigma^{-1/2}\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{L \times L})$, 故

$$(\Sigma^{-1/2}\mathbf{X})^T(\Sigma^{-1/2}\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\Sigma^{-1}\mathbf{X} \sim \chi^2(L)$$

χ^2 -分布的密度函数

多系数检验：Wald 检验与 F-检验

- 上述多系数联合检验，可使用如下 Wald 统计量

$$W_T \equiv \boldsymbol{\xi}_T^\top \left(\frac{1}{T} \hat{\sigma}_{\varepsilon, T}^2 \mathbf{R} \hat{\mathbf{M}}_T^{-1} \mathbf{R}^\top \right)^{-1} \boldsymbol{\xi}_T = \frac{T}{\hat{\sigma}_{\varepsilon, T}^2} \hat{\boldsymbol{\beta}}_T^\top \mathbf{R}^\top (\mathbf{R} \hat{\mathbf{M}}_T^{-1} \mathbf{R}^\top)^{-1} \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\beta}}_T$$

服从 $\chi^2(L)$ -分布，又称为 Wald 检验

- 当 W_T 的样本取值 $\bar{W}_T = \frac{T}{\hat{\sigma}_{\varepsilon, T}^2} \hat{\boldsymbol{\beta}}_T^\top \mathbf{R}^\top (\mathbf{R} \hat{\mathbf{M}}_T^{-1} \mathbf{R}^\top)^{-1} \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\beta}}_T$ 大于 α -显著性临界值 $\chi_\alpha^2(L)$ ，或者该检验 p -值 $\Pr(W_T \geq \bar{W}_T)$ 小于显著性水平 α 时，拒绝 $H_0: \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$
- α 通常为 1%, 5%, 10%; $\chi_\alpha^2(L)$ 为分布对应的 α -分位数
- F-检验：统计量为 $F_T = W_T/L$ ，分布为 F-分布 $F(L, T - K)$
 - 但这是一个小样本检验，需要残差项 ε_t 为 iid 正态分布才能得出 F-分布

本节内容

- 1 线性回归模型的推断
- 2 AR 系数的推断

AR 模型的 OLS 估计

- 平稳 AR(p) 模型: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\}$ iid, 0-均值
- 给定样本 $\{X_t\}_{t=1}^T$, AR(p) 模型的 OLS 回归矩阵形式:

$$Y = X\phi + \varepsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} X_{p+1} \\ \vdots \\ X_T \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{p+1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{X}_T^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_p & \cdots & X_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{T-1} & \cdots & X_{T-p} \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

- OLS 估计量: $\hat{\phi}_T = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top Y$

AR 模型 OLS 估计系数的渐近分布

- 一致性：平稳性 $\Rightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}] = 0$ ，即 $\mathbb{E}[\varepsilon_t | \mathbf{X}_t^T] = 0$ ，故 $T^{-1} \sum_t \mathbf{X}_t \varepsilon_t = \mathbf{0}$
- 渐近分布：关键在于验证 $\mathbf{X}_t^T \varepsilon_t$ 是鞅差序列，等价于各个分量 $Z_t \equiv X_{t-i} \varepsilon_t$ 是鞅差序列， $\forall i = 1, \dots, p$
 - 需要验证 $\mathbb{E}[Z_{t+1} | \Omega_t] = 0$ ； t -期信息集 $\Omega_t = \{X_t, X_{t-1}, \dots\} = \{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots\}$
 - $\mathbb{E}[Z_{t+1} | \Omega_t] = \mathbb{E}[X_t \varepsilon_{t+1} | \Omega_t] = \mathbb{E}[X_t \varepsilon_{t+1} | X_t, \dots] = X_t \mathbb{E}[\varepsilon_{t+1} | X_t] = 0$
 - $\mathbb{E}[\varepsilon_{t+1} | X_t] = 0$ 是因为 X_t 由 $\{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots\}$ 决定，后者与 ε_{t+1} 相互独立，故 $\mathbb{E}[\varepsilon_{t+1} | X_t] = \mathbb{E} \varepsilon_{t+1} = 0$
- 前面 OLS 回归统计推断的所有结论均适用！