2023 秋季本科时间序列

第 4 次作业答案

10 月 26 日

1. (a) 给定大于等于 $|z|$ 的正整数 M

$$
\begin{aligned}
|e^z| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{M^n}{n!} + \sum_{n=M}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \\
&\le \sum_{n=0}^{M-1} \frac{M^n}{n!} + \sum_{n=M}^{\infty} \frac{M^M}{M!} \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n-M} \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} \frac{M^n}{n!} + \frac{M^M}{M!} \frac{1}{\sum_{n=M}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{n-M}} \\
&\le \sum_{n=0}^{M-1} \frac{M^n}{n!} + \frac{M^M}{M!} < \infty
\end{aligned}
$$

(b) 定义复数 z 的正余弦函数：

$$
\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}
$$

利用 (a) 中的定义, 可得：

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}e^{iz}+\frac{1}{2}e^{-iz}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}+\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}-\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\\ &= 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\end{aligned}$$

同理可得:

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2i}e^{iz}-\frac{1}{2i}e^{-iz}\\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\\ &= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}+\frac{i}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}+\frac{i}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots.\end{aligned}$$

可以发现与 $\mathbb{R}$ 上的 Taylor 级数一致。

(c) 利用 (b) 中的定义，$\forall z \in \mathbb{C}$，

$$\cos(z)+i\sin(z)=\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}+i\frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=e^{iz}.$$

特别的，取 $z=\theta\in\mathbb{R}$ ，有 $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ ，该式对 $\forall\theta\in\mathbb{R}$ 成立。

(d) 对于复数形如 $z=a+ib$, 可得幅角 $\theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

由 (c) 知：$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

由于 $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

故 $|z|e^{i\theta}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=a+ib=z$

2. $\because (1-\rho\mathscr{L})X_t=Y_t$

$\therefore X_t=\frac{1}{1-\rho\mathscr{L}}Y_t=\sum_{i=0}^{\infty}(\rho^i\mathscr{L}^i)Y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\rho^iY_{t-i}$

$\mu_x=\mathbb{E}(X_t)=\mathbb{E}(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^iY_{t-i})=\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\mathbb{E}(Y_{t-i})=\mu_Y\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i=\frac{\mu_Y}{1-\rho}$

$\sigma_x^2(k) = \text{cov}(X_t, X_{t-k})$

$= \text{cov}(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i Y_{t-i}, \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j Y_{t-k-j})$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \text{cov}(Y_{t-i}, Y_{t-k-j})$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \sigma_y^2(j-i-k)$

由协方差的 Cauchy-Schwartz 不等式可知,$\because \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j |\sigma_y^2(j-i-k)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j+i} \sigma_y^2(0) =$

$\sigma_y^2(0)\frac{1}{(1-\rho)^2}$，故原级数收敛

$\because Y_t$ 为平稳过程且 $\mathbb{E}Y_t = 0$

$\therefore \mu_Y$，$\sigma_Y^2(k+j-i)$ 均与 t 无关

$\therefore \mu_x$，$\sigma_x^2(k)$ 也与 t 无关，即 X_t 为平稳序列

3. $X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-1} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} = A^{-1}(\mathscr{L}) B(\mathscr{L}) \varepsilon_t$

   $\because \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0, \text{var}(\varepsilon_t) = 1$

   $\therefore \varepsilon_t$ 的谱密度函数 $S_\varepsilon(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i2\pi\omega k} = \gamma(0) = 1$

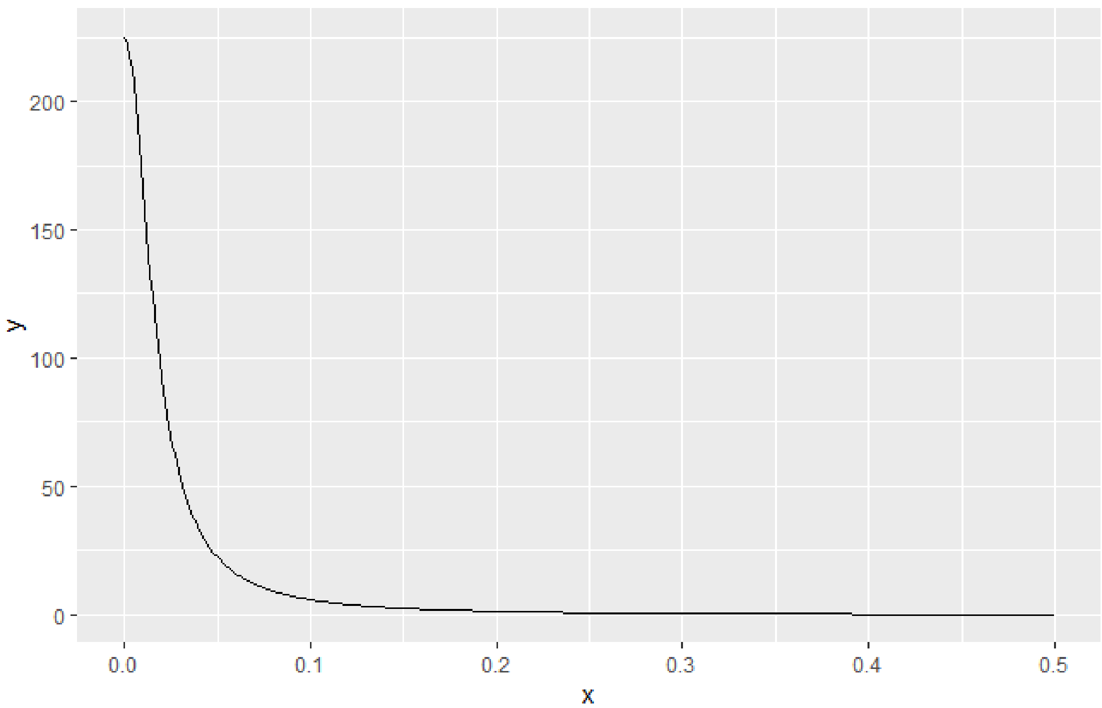
   X_t 的谱密度函数表达式为 $S_X(\omega) = \frac{B(e^{i2\pi\omega})B(e^{-i2\pi\omega})}{A(e^{i2\pi\omega})A(e^{-i2\pi\omega})} S_\varepsilon(\omega) = \frac{B(e^{i2\pi\omega})B(e^{-i2\pi\omega})}{A(e^{i2\pi\omega})A(e^{-i2\pi\omega})}$

   ARMA(1,1) 过程 $(1-0.9\mathscr{L})X_t = (1+0.5\mathscr{L})\varepsilon_t$ 的谱密度函数图形绘制如下：

   $S_X(\omega) = \frac{(1+0.5e^{i2\pi\omega})(1+0.5e^{-i2\pi\omega})}{(1-0.9e^{i2\pi\omega})(1-0.9e^{-i2\pi\omega})} = \frac{1.25+0.5(e^{i2\pi\omega}+e^{-i2\pi\omega})}{1.81-0.9(e^{i2\pi\omega}+e^{-i2\pi\omega})} = \frac{1.25+\cos(2\pi\omega)}{1.81-1.8\cos(2\pi\omega)}$

   代码如下：

```
library (tidyverse)
x<-seq(0,1/2,0.001)
y<-(1.25+cos(2*pi*x))/(1.81-1.8*cos(2*pi*x))
num<-tibble(x,y)
ggplot(data=num)+geom_line(mapping = aes(x=x,y=y))
```


200
150
100
50
0
y
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x