

2023 秋季本科时间序列

第 9 次作业

提交日期：12 月 11 日

1. 考虑 2-元变量 VAR(1) 过程 $\mathbf{X}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}\mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$ ，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为向量白噪声，

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\Omega}$ 为 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的协方差矩阵。

- (a) 请验证 \mathbf{X}_t 的平稳性，并计算期望 $\mathbb{E}\mathbf{X}_t$ 。
- (b) 请计算 \mathbf{X}_t 的 $\text{MA}(\infty)$ 展开，再进一步计算协方差矩阵 $\text{var}(\mathbf{X}_t)$ 。提示：请先计算 $\mathbf{\Phi}$ 的特征值分解 $\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A}^{-1}$ 及 $\mathbf{\Phi}^i$ 表达式。
2. 从 CMTS 数据库 <https://www.atlantafed.org/cqer/research/china-macroeconomy?panel=2#Tab2> 获取数据包 2023-07-data.zip，并提取 1992Q1 开始的中国季度实际 GDP 对数值与 CPI（居民消费价格）数据。

- (a) 构造 GDP 季度同比增速序列 $\{y_t\}$ ，并转换单位为百分比%，使用 `arima` 函数对 $\{y_t\}$ 进行 ARMA 建模估计（默认使用极大似然估计，且不使用差分设定），利用 AIC、BIC 信息准则确定最优的 AR 与 MA 滞后阶数 (p, q) ，并汇报模型估计结果（参数取值、标准误、 R^2 等）。
- (b) 构造 CPI 季度同比增速序列 $\{\pi_t\}$ ，并转换单位为百分比%，同上使用 `arima` 函数对 $\{\pi_t\}$ 进行 ARMA 建模估计，利用 AIC、BIC 信息准则确定最优的 AR 与 MA 滞后阶数 (p, q) ，并汇报模型估计结果（参数取值、标准误、 R^2 等）。提示： π_t 在 90 年代初期很高，可能造成样本整体不符合平稳性条件，因此可以在估计时只考虑 97 后的数据。
- (c) 使用 TSA 包的 `ARMAspec` 函数计算上两问中估计出来的 y_t, π_t ARMA 模型对应的理论谱密度，再使用 `spec.pgram` 函数直接对 $\{y_t\}, \{\pi_t\}$ 序列估计样本谱密度（注意设置样本谱密度平滑参数）。比较理论谱密度与样本谱密度，并说明上两问中估计所得 ARMA 模型是否能够充分刻画两个序列的周期波动特征。
- (d) 将 y_t, π_t 的建模限制为 AR 模型，使用 OLS 进行估计，同样利用 AIC、BIC 确定滞后阶数。汇报估计结果，并比较同模型（如滞后阶数）的 OLS 估计与极大似然估计间的异同。
- (e) 对 y_t, π_t ，你认为是否有必要在时序建模时，考虑 MA 项？请从样本谱密度角度说明理由。提示：MA 项能够捕捉高频波动特征。

- (f) 舍去 2020 年之后的数据，重复上述分析并对比结果。你认为对 y_t, π_t 进行 ARMA 建模时，纳入疫情期间的数据样本，是否合理？换言之，你认为 ARMA 模型作为数据生成过程 (DGP)，是否适合于描述包括疫情期间样本的整体数据特征？