2023 秋季本科时间序列

第 7 次作业

提交日期：11 月 20 日

1. 考虑 AR(2,1) 模型 $X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$，其中参数 $\{\phi_1, \phi_2, \theta\}$ 满足平稳与可逆条件，$\{\varepsilon_t\} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$。
   (a) 假设 $\phi_1 = 1.5, \phi_2 = -0.56, \mu = 0.12, \theta = 0.5, \sigma_\varepsilon = 0.1$，请计算 $\mathbb{E}X_t$。
   (b) 令 $\tilde{X}_t = X_t - \mathbb{E}X_t$，则 $\tilde{X}_t = \phi_1\tilde{X}_{t-1} + \phi_2\tilde{X}_{t-2} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$，请计算 $\tilde{X}_t$ 关于 $\{\varepsilon_t\}$ 的 Wold 表示的前三项 $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}$ 系数 ψ_0, ψ_1, ψ_2。
   (c) 请计算 $\mathbb{E}X_t\varepsilon_t, \mathbb{E}X_t\varepsilon_{t-1}, \mathbb{E}X_t\varepsilon_{t-2}$。
   (d) 模仿课件 6 pp. 17–18 的例子，在 $\tilde{X}_t = \phi_1\tilde{X}_{t-1} + \phi_2\tilde{X}_{t-2} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ 依次乘以 X_t, X_{t-1}, X_{t-2} 并取期望，进而计算自协方差 $\sigma_X^2(k), k = 0, 1, 2$。
   (e) [附加题 5 分] 计算 X_t 的谱密度函数 $s_x(\omega)$，并利用课件 4 p. 19 的逆变换公式，直接求 $\sigma_X^2(0)$，进而验证上问计算结果。
   (f) 给定样本 $X_t, t = 1, \ldots, T$，请写出 $Y_t \equiv X_t - \mu - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2}, t = 3, \ldots, T$ 的协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}$，注意 $Y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ 为 MA(1) 过程。
   (g) [编程题，单独提交代码] 给定 $X_{-1} = X_0 = \mathbb{E}X_t, \varepsilon_0 = 0$，随机生成 $\{\varepsilon_t : t = 1, \ldots, 5000\}$，进而生成模拟序列 $\{X_t : t = 1, \ldots, 5000\}$。对 $k = 1, \ldots, 50$，基于第 k 组样本 $\mathcal{X}^{(k)} = \{X_t : t = 1, \ldots, 100k\}$，利用 `arima` 函数对 $\mathcal{X}^{(k)}$ 进行 ARMA(2,1) 建模，并使用极大似然估计方法，基于模拟数据，获得估计值 $\hat{\mu}^{(k)}, \hat{\phi}_1^{(k)}, \hat{\phi}_2^{(k)}, \hat{\theta}^{(k)}, \hat{\sigma}_\varepsilon^{(k)}$，注意 $\hat{\sigma}_\varepsilon^{(k)}$ 表示第 k 组样本下 σ_ε 的估计值，分 5 个图，绘制这五个参数估计值关于 k 的序列，并讨论这 5 个参数的极大似然估计，是否具有一致性。
   (h) [续上题] 对于 $\mathcal{X}^{(k)}$，利用 `arima` 函数进行 ARMA(p,q) 自由阶数建模，使用函数自带 AIC、BIC 准则，记录其自动选择的阶数 $(p^{(k)}, q^{(k)})$，并绘制这两组基于样本自动选择的模型阶数关于 k 的序列图。对比 AIC 和 BIC 选择阶数的效果，说明不同样本量下，使用哪个准则选择阶数更准确或一样准确。

2. 假设 X_t 为 MA(2) 过程 $X_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$，$\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声过程，$\sigma_\varepsilon = 1$。请按照定义，计算 $\hat{X}_{t+s|t}, \forall s \geq 1$。注意，请首先确定 X_{t+s} 与 $X_t, X_{t-1}, \ldots$ 中的哪些项相关，在计算 $\hat{X}_{t+s|t}$ 时，只需考虑相关性不为 0 的 X_{t-j}，进而计算相应系数 $\hat{\boldsymbol{b}}_s$。