

2023 秋季本科时间序列

第 5 次作业

提交日期：11 月 6 日

1. 考虑 AR(2) 过程 $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$, ε_t 为白噪声, $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ 。请计算使得 X_t 为平稳过程的自回归系数取值范围 $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2$, 并绘图表示 (可以手绘, 但需标明关键点坐标值)。
2. 延续上题, 请用迭代法计算 X_t Wold 表示的前 5 项表达式。
3. 延续上题, 计算课件 6 p.18 系数矩阵的行列式, 说明该行列式非零的条件与 AR(2) 过程平稳性条件的关系, 并用 Cramer 法则计算该矩阵的逆。
4. 延续上题, 假设 $\phi_1 = 0.9, \phi_2 = -0.2$, 请计算 $\sigma_X^2(k), k = 0, 1, 2$, 并利用课件 6 p.19 所列递推公式, 通过求解递推系数矩阵特征值分解求出该矩阵 k 次幂表达式, 进而求出 $\sigma_X^2(k)$ 通项表达式。
5. 延续上题, 假设 $\phi_1 = 1, \phi_2 = -0.25$, 再进行类似计算。请说明递推系数矩阵此时是否可以进行特征值分解? 若不可, 请尝试计算其 k 次幂的表达式, 并完成子协方差通项表达式的计算。
6. 对一般的 AR(p) 过程 $X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$, 假设自回归系数 ϕ_1, \dots, ϕ_p 可保证 X_t 平稳。请推导其 Yule-Walker 方程, 并将其重新排列为可由过程参数直接求解 $\sigma_X^2(k), k = 0, \dots, p$ 的线性方程组形式。