2023 秋季本科时间序列

第 4 次作业

提交日期：10 月 23 日

1. 在复平面 $\mathbb{C}$ 上对任意复数 z 定义指数函数为：

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

其中阶乘 $n! = 1 \times \cdots \times n \ \forall n \geq 1$，并补充定义 $0! = 1$。

   (a) 请证明，对于任意 $z \in \mathbb{C}$，$|e^z| < \infty$，即 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 是一个收敛级数。提示：注意到以下事实，从而使用复数版 Cauchy 收敛准则（可简单等同为实数版本）证明之：任选大于等于 $|z|$ 的正整数 M，则当 $n \geq M$ 时有 $\frac{M^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!}\left(\frac{M}{M+1}\right)^{n-M}$。

   (b) 进一步定义复数 z 的余弦和正弦函数为：

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

   请证明如下级数展开式：

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots,$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

   并说明上述级数展开式与定义在实数轴 $\mathbb{R}$ 上的 $\cos, \sin$ 函数 Taylor 级数一致。

   (c) 请证明 $e^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$；特别的，$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \ \forall \theta \in \mathbb{R}$。

   (d) 对于任意复数 $z = a + b\mathrm{i}$，令 θ 为向量 z 在 2-维平面 $\mathbb{C}$ 上与实部正半轴（即常规的 x-正半轴）的逆时针夹角，称为幅角。利用 (c)，请证明 $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$；此表达式称为复数的极坐标形式。

2. 给定 $\{Y_t\}$ 平稳且 $\mathbb{E}Y_t = 0$，$\rho \in \mathbb{C}$ 且 $|\rho| < 1$，请证明由 $(1 - \rho\mathscr{L})X_t = Y_t$ 定义的序列 $\{X_t\}$ 为平稳序列。

3. 给定平稳可逆 ARMA(p, q) 过程 $A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$，其中 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声且方差为 1，$A(\mathscr{L}) = 1 - \phi_1\mathscr{L} - \cdots - \phi_p\mathscr{L}^p$，$B(\mathscr{L}) = 1 + \theta_1\mathscr{L} + \cdots + \theta_q\mathscr{L}^q$，$\{\phi_i\}, \{\theta_j\} \subset \mathbb{R}$，请计算 X_t 的谱密度函数表达式，并绘制 ARMA(1,1) 过程 $(1 - 0.9\mathscr{L})X_t = (1 + 0.5\mathscr{L})\varepsilon_t$ 的谱密度函数图形（可用 R 或其他任何计算程序）。