2023 秋季本科时间序列

第 3 次作业

提交日期：10 月 9 日

1. 请计算课件 4 第 11 页最后例子中 X_t 的期望与自协方差函数，说明 σ_k^2 的周期特征，并使用 R 编程随机模拟一个长度为 100 的样本序列并画图展示。

2. 给定 $X_t = 0.1 + 0.9X_{t-1} + \varepsilon_t$，其中 $\varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$。

   (a) 按照上课时讲授的例子，请计算出 X_t 的平稳分布 $F(x)$，并计算平稳分布下 X_t 的期望 μ 与方差 σ^2。

   (b) 编写 R 代码，按照 $F(x)$ 对 X_0 进行抽样，并随机抽样 $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{10,000}$，进而模拟计算样本序列 $\{X_t\}_{t=1}^{10,000}$，随后进行如下计算：

      i. 对 $k = 1, \ldots, 100$，计算前 $100k$ 样本均值序列 $\hat{\mu}_{(k)} = \frac{1}{100k}\sum_{t=1}^{100k} X_t$，绘图展示，并在图中绘制水平线 $\mathbb{E}X_t = \mu$，比较确定 $\hat{\mu}_{(k)}$ 是否随 k 的增加收敛到 μ。

      ii. 对 $k = 1, \ldots, 100$，计算前 $100k$ 样本方差序列

      $$\hat{\sigma}^2_{(k)} = \frac{1}{100k}\sum_{t=1}^{100k}\left(X_t - \hat{\mu}_{(k)}\right)^2$$

      绘图展示，并在图中绘制水平线 $\mathrm{var}(X_t) = \sigma^2$，比较确定 $\hat{\sigma}^2_{(k)}$ 是否随 k 的增加收敛到 σ^2。

   (c) 假设 X_t 处于平稳分布 $F(x)$，对于某一样本量 T，考虑如下样本方差估计值

   $$\hat{\sigma}^2_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \hat{\mu}_T\right)^2$$

   其中 $\hat{\mu}_T$ 为相应的样本均值。

      i. 请说明 $\hat{\sigma}^2_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t^2 - \hat{\mu}_T^2$，进而说明 $\mathbb{E}\hat{\sigma}^2_T = \sigma^2 + \mu^2 - \mathbb{E}\hat{\mu}^2_T$。

      ii. 模仿 (b) 中随机模拟的方法，通过模拟计算确定 $\mathbb{E}\hat{\mu}^2_T$ 的近似取值：重复生成 $k = 1, \ldots, 1000$ 组样本，每组样本长度为 $T = 1000$，进而计算 1000 次 $\hat{\mu}_{T(k)}$，利用 $\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}\hat{\mu}^2_{T(k)}$ 来近似 $\mathbb{E}\hat{\mu}^2_T$。

      iii. 比较 μ^2 与 $\mathbb{E}\hat{\mu}^2_T$ 的大小关系。你是否认为两者相等？你可以尝试其他模拟样本量、X_t 过程参数等，来进一步论证你的结论。

3. 考虑 $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$，其中 $\varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$，$X_0 = 0$。选择 T，首先抽样 $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T$ 并固定之，然后考虑 $\rho_1 = 0.999$ 和 $\rho_2 = 1.001$，利用同样的 $\{\varepsilon_t\}$ 生成 ρ_i 对应的样本序列 $\{X_t^{(i)}\}_{t=1}^T$，并绘制在同一图中。依次考虑 $T = 100, 1000, 10000$，并对比各次抽样绘制得到的 3 幅图，说明 ρ_1 和 ρ_2 下，X_t 的平稳性是否有差异。。