

2023 秋季本科时间序列

第 2 次作业

提交日期：9 月 25 日

1. 请计算作业 1 第 3 题中, X, Y 各自的边缘分布, 并说明其是否相互独立。
2. 假设 X, Y 为相互独立的 $N(0, 1)$ 分布随机变量。请计算 $Z = X/Y$ 的分布函数, 并说明 Z 是否存在一阶矩和二阶矩。
3. 假设总体分布为 $U([a, b])$, $a < b$, 样本为 $\{X_i\}_{i=1}^N$, 请给出 a, b 的一个矩估计方法, 并说明这一矩估计是否具有有一致性。
4. 假设 iid 样本 $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^N$ 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 密度函数 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, 请写出这组样本对应的似然函数 $L(\lambda|\mathcal{X})$, 利用对数似然函数推导其极大似然估计 $\hat{\lambda}_N$, 并说明该估计是否具有有一致性。
5. 假设 $\{X_i\}_{i=1}^N$ 为 iid 样本, X_i 期望为 μ , 方差为 σ^2 。

(a) 定义基于总体均值的样本方差估计为

$$\hat{s}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2,$$

请证明 $\mathbb{E}\hat{s}_N^2 = \sigma^2$, 且 $\hat{s}_N^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$ 。

(b) 定义基于样本均值的样本方差估计为

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_N)^2,$$

其中 $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$, 请证明 $\mathbb{E}\hat{\sigma}_N^2 = \sigma^2$, 且 $\hat{\sigma}_N^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$ 。