

2023 秋季本科时间序列

第 1 次作业

提交日期：9 月 18 日

1. 假设 X 为连续型随机变量，取值范围为 \mathbb{R} ，密度函数为 $f(x)$ ，请证明其分布函数 $F(x)$ 为连续函数。
2. 假设 $[X, Y]^T$ 服从 2 元联合正态分布

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- (a) 请说明 a, b, c, d 满足什么条件时， $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 为一个协方差矩阵。
 - (b) 请计算验证 $\text{var}(X) = a$, $\text{var}(Y) = d$, $\text{cov}(X, Y) = b$, $\text{cov}(Y, X) = c$ 。
 - (c) 请计算 X 与 Y 各自的边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$ 。
3. 假设 X, Y 为两个离散随机变量，取值范围均为 $\{1, \dots, n\}$ ，联合概率（质量）为 $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = (i + j)/C, \forall i, j = 1, \dots, n$ ，其中 C 为一个常数。
 - (a) 请求 C 的取值。
 - (b) 请计算 $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y, \mathbb{E}X^2, \mathbb{E}Y^2, \text{var}(X), \text{var}(Y), \mathbb{E}XY, \text{cov}(X, Y)$ 。提示：请自行搜索平方和、立方和求和公式。
 4. 【附加题，10 分】假设 X, Y, Z 为三个离散随机变量，取值范围均为 $\{1, \dots, n\}$ ，联合概率（质量）为 $\mathbb{P}(X = i, Y = j, Z = k) = (i + j + k)/C, \forall i, j, k = 1, \dots, n$ ，其中 C 为一个常数。
 - (a) 请求出 C 的取值。
 - (b) 请计算 $\mathbb{E}XYZ$ 。