

金融学 2023 年秋 · 时间序列

# 第 4 讲：时间序列数据基本特征

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2023 年 9 月 25 日

# 本讲内容

- ① 基本统计特征
- ② 平稳性的基本概念
- ③ 季节性与趋势性

## 本节内容

- 1 基本统计特征
- 2 平稳性的基本概念
- 3 季节性与趋势性

## 时间序列数据主要统计特征

与普通数据序列一样，时间序列数据  $\{X_t\}$  主要统计特征包括：

- 期望： $\mathbb{E}X_t$
- 方差、标准差： $\text{var}(X_t), \sigma_X$
- 以及两个变量间的协方差： $\text{cov}(X_t, Y_t)$  及相关系数  $\rho_{XY}$

但与普通数据不同，时间序列数据的主要统计特征还包括

- 自协方差 (autocovariance):  $\text{cov}(X_t, X_{t-k}), k \geq 1$
- 对应的，自相关系数 (autocorrelation):

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-k})}{\sigma_X^2}$$

- 注意，上述各阶矩和  $t$  无关  $\Rightarrow$  平稳性假设

## 矩的估计

- 给定时间序列数据  $\{X_t\}_{t=1}^T$ , 各阶矩的估计 (estimate) 如下
- 期望 (均值):  $\hat{\mu}_X = \frac{1}{T} \sum_t X_t$ ;  $\sum_t$  表示对  $t = 1, \dots, T$  求和
- 方差:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \begin{cases} \frac{1}{T-1} \sum_t (X_t - \hat{\mu}_X)^2, & \text{unbiased if iid} \\ \frac{1}{T} \sum_t (X_t - \hat{\mu}_X)^2, & \text{biased} \end{cases}$$

大样本之下, 无偏 (unbiased) 估计与有偏 (biased) 估计等价

- 协方差:

$$\hat{\sigma}_{XY} = \begin{cases} \frac{1}{T-1} \sum_t (X_t - \hat{\mu}_X)(Y_t - \hat{\mu}_Y), & \text{unbiased if iid} \\ \frac{1}{T} \sum_t (X_t - \hat{\mu}_X)(Y_t - \hat{\mu}_Y), & \text{biased} \end{cases}$$

- 相关系数:  $\hat{\rho}_{XY} = \hat{\sigma}_{XY} / (\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y)$

## 矩的估计

- 自协方差：

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{T-k} \sum_{t=k+1}^T (X_t - \hat{\mu}_X)(X_{t-k} - \hat{\mu}_X)$$

注意求和中  $t$  的取值范围

- 自相关系数：

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\sigma}_X^2}$$

练习 估计值  $\hat{\rho}_{XY}, \hat{\rho}_k$  是否仍然介于  $\pm 1$  之间？

- 在上下文区分明确时，也可以略去“^”符号
- 但有时为明确样本量，也会增加  $T$  下标，如  $\hat{\mu}_{X,T}$

## 平稳时间序列的大数定律

给定时间序列数据  $\{X_t\}_{t=1}^T$ ，上述矩估计的理论基础在于大数定律 (law of large number)

## 定理 1

当  $X_t$  满足**特定条件**时，样本均值**以概率 1 收敛**到总体均值

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\mu}_{X,T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t = \mathbb{E}X_t$$

## 大数定律：进一步讨论

- **特定条件**：弱于  $\{X_t\}$  iid；本课程中，可以理解为“平稳性条件”——严格说法是“严平稳遍历性条件”
- **收敛**：随机变量的收敛概念有 4 种，依分布收敛  $\xrightarrow{d}$ ，依概率收敛  $\xrightarrow{P}$ ，矩收敛  $\xrightarrow{m}$ ，概率-1 收敛（几乎处处收敛） $\xrightarrow{\text{a.s.}}$ 
  - 假设有 r.v. 序列  $\{Z_t\}_{t=1}^{\infty}$  和 r.v.  $Z$ ，则称
    - ①  $Z_t \xrightarrow{d} Z$ ，若  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{Z_t}(z) = F_Z(z)$  对几乎所有  $z$  成立
    - ②  $Z_t \xrightarrow{P} Z$ ，若  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Z_t - Z| \geq \varepsilon) = 0$
    - ③  $Z_t \xrightarrow{m} Z$ ，若  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(Z_t - Z)^2] = 0$
    - ④  $Z_t \xrightarrow{\text{a.s.}} Z$ ，若  $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = Z) = 1$
  - 4 种收敛的关系： $\left\{ \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{a.s.}} \\ \xrightarrow{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \xrightarrow{P} \Rightarrow \xrightarrow{d}$
  - 大数定律中“收敛”可以达到  $\xrightarrow{\text{a.s.}}$



## 本节内容

- 1 基本统计特征
- 2 平稳性的基本概念
- 3 季节性与趋势性

## 平稳性的两个定义

给定双边无穷时间序列  $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

- ① 协方差平稳性 (covariance stationarity):  $\{X_t\}$  称为协方差平稳序列, 如果  $\mathbb{E}X_t = \mu$ ,  $\text{cov}(X_t, X_{t-k}) = \sigma_k^2$ ,  $k = 0, \dots, \infty$ , 均不依赖于  $t$ 
  - 协方差平稳性又称为 2-阶矩平稳或矩平稳
- ② 严平稳性 (strict stationarity):  $\{X_t\}$  称为严平稳序列, 如果  $\forall k = 0, \dots, \infty$ ,

$$(X_t, \dots, X_{t-k})$$

的分布与  $t$  无关

- ③ 本门课中, “平稳” 序列同时满足上述两个定义
  - 这两个定义互相不蕴含对方

## 平稳性与趋势、季节性

- 平稳性与趋势不兼容
  - $X_t$  平稳, 则  $\mathbb{E}X_t = \mu$  为常数, 且大数定律意味着  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \rightarrow \mu$ ; 均值回归倾向
  - 趋势意味着  $X_t$  的样本均值不会收敛
- 平稳性与季节性兼容
  - 季节性变量:  $\{S_t\}$  满足  $S_{t+p} = S_t, \forall t, p$  表示季节周期
  - 对任意  $t, \sum_{0 \leq k \leq p-1} S_{t+k}$  为常数
  - 如果把  $X_t = Y_t + S_t, Y_t$  平稳, 且将  $X_t$  的期望理解为一个季节周期上的均值, 则  $X_t$  也平稳
  - 例如, 令  $U \sim \mathcal{U}([- \pi, \pi])$ ,  $X_t = \cos(\pi t + U), t \in \mathbb{Z}$ , 可验证  $\mathbb{E}X_t$  及  $\sigma_k^2 = \text{cov}(X_{t+k}, X_t)$  与  $t$  无关; 但  $\sigma_k^2$  呈现周期性

## 平稳性和平稳分布

- 平稳性定义中的期望和协方差，都在平稳分布 (stationary distribution) 下计算
  - 这个分布就是严平稳概念中的 1-元变量  $X_t$  服从的分布
- 一般而言，随机过程是否存在平稳分布是个问题
  - $X_0 = 0, X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ，就不存在平稳分布
  - 给定一个有限状态马氏链  $X_t \in \{1, 2\}$ ，转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \rho & 1 - \rho \\ 1 - \rho & \rho \end{bmatrix}$$

$\rho \in (0, 1)$ ，则  $X_t$  有平稳分布  $\mathbf{u} = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

- 即便随机过程存在平稳分布，从任何一个起点  $X_0 = \bar{x}$  开始， $X_t$  的分布会不会逐渐收敛到平稳分布，也是一个问题

## 平稳性的关键性质

## 定理 2

若  $\{X_t\}$  是平稳序列，对任意的  $k+1$ -元可测函数  $f$ ，定义

$$Y_t = f(X_t, \dots, X_{t-k})$$

则  $\{Y_t\}$  也是平稳序列。

## 随机收敛的性质

## 定理 3

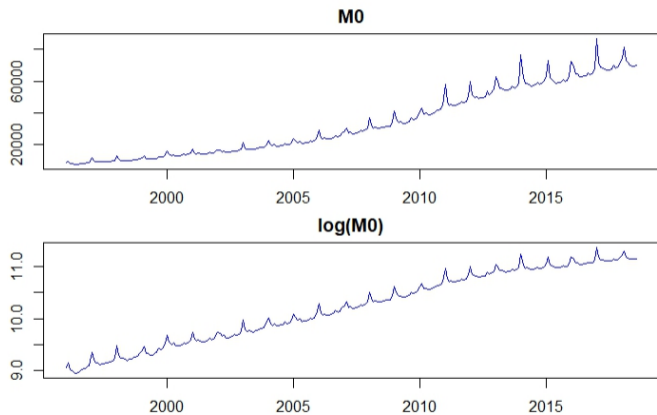
假设  $X_t \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ ,  $Y_t \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$ , 则对任意的可测函数  $f$ , 有

$$f(X_t, Y_t) \xrightarrow{\text{a.s.}} f(X, Y).$$

## 本节内容

- ① 基本统计特征
- ② 平稳性的基本概念
- ③ 季节性与趋势性

## 季节性示例 1

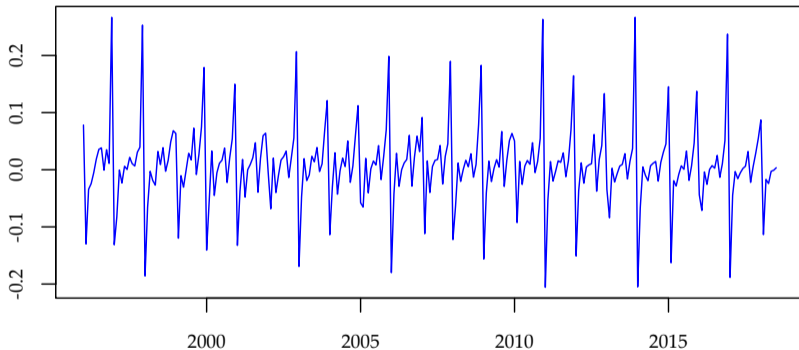


需要对原始数据进行季节调整 (seasonal adjustment)



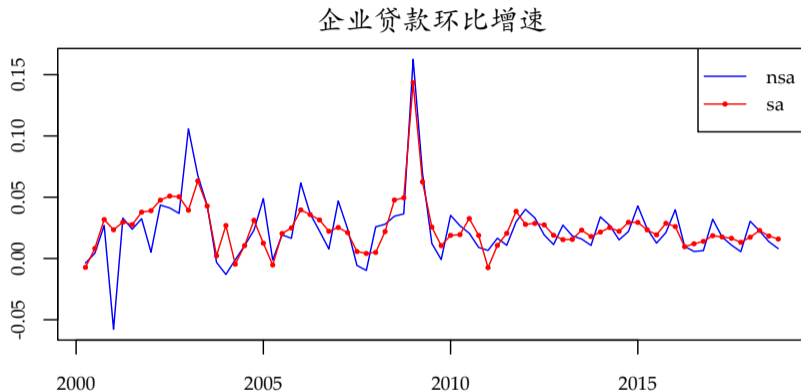
## 示例 2: M0 环比增速

未季调基础货币供应量环比增速



- 该序列未经过季调，可以看到明显的季节性周期性波动特征；R 中季节调整的包为 `seas`

### 示例 3：贷款环比增速

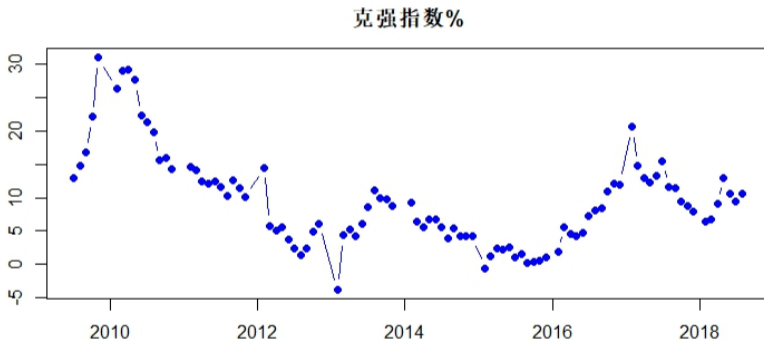


nsa: not seasonally adjusted      sa: seasonally adjusted

- 未经季节调整的序列，有年度（4 季度）周期波动特征

## 时间序列的趋势性

- 时间序列关心数据在时间上的变动

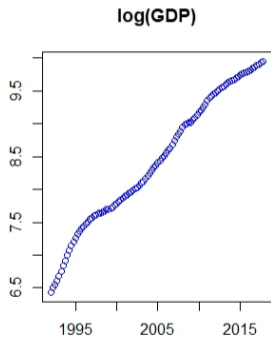
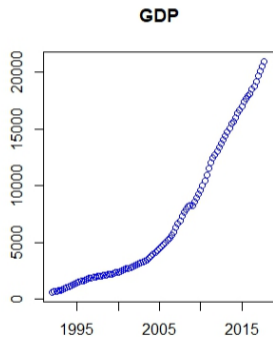


$$\hat{\mu} = 9.53, \hat{\sigma} = 6.98, \hat{\rho} = 0.92$$

- 有趋势 vs. 无趋势

## 趋势的常见类型

- 指数趋势 vs. 线性趋势



- 两者之间差一个对数变换:  $X_t \Rightarrow \log(X_t)$

## 线性趋势调整：基本方法

- 原始数据  $\{X_t\}_{t=1}^T$  包含线性趋势  $X_t = \alpha t + \tilde{X}_t$ , 而  $\tilde{X}_t$  无趋势
- 两端取差分

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \alpha + \tilde{X}_t - \tilde{X}_{t-1} = \alpha + \Delta \tilde{X}_t$$

其中  $\Delta$  表示差分算子, 则  $\Delta X_t$  不包含趋势

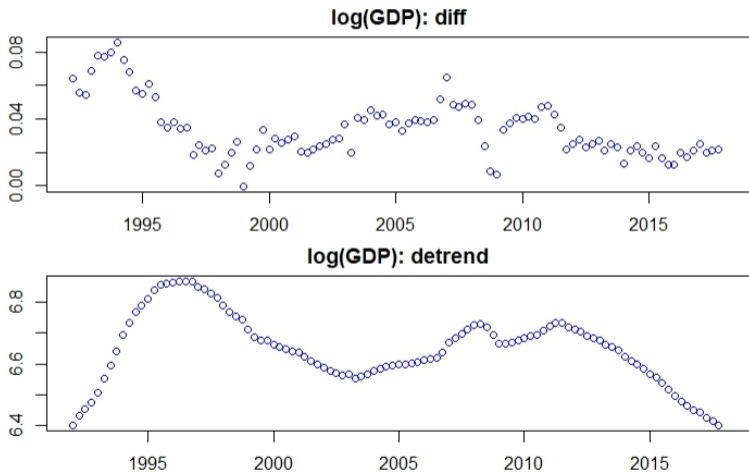
- 或者, 如果要求  $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_T$ , 则有

$$\alpha = \frac{X_T - X_1}{T - 1}$$

从而可以推算  $\tilde{X}_t$

- 类似的过程称为去趋势 (detrend)

## 去趋势示例



## 时间序列的周期项与趋势项

- 应用时间序列分析的一个重要内容：区分时间序列的周期项 (cycle) 与趋势项 (trend)

$$X_t = X_t^{\text{cycle}} + X_t^{\text{trend}}$$

- 时间序列的谱函数：揭示出时间序列的许多周期信息
  - 高频部分：短周期， $1/\omega$  小
  - 低频部分：长周期， $1/\omega$  大
- 时间序列的趋势：可以理解为序列中对应**低频**周期项的部分

$$X_t^{\text{trend}} = X_t^{\text{low freq}} \quad X_t^{\text{cycle}} = X_t^{\text{high freq}}$$

- 时间序列低频与高频、趋势与周期的分离，称为时间序列的滤波 (filter)

## HP 滤波

- 给定样本序列  $\{X_t\}_{t=1}^T$ , HP 滤波 (HP filter) 通过求解最小化问题获得趋势项  $\{\tilde{X}_t\}$ :

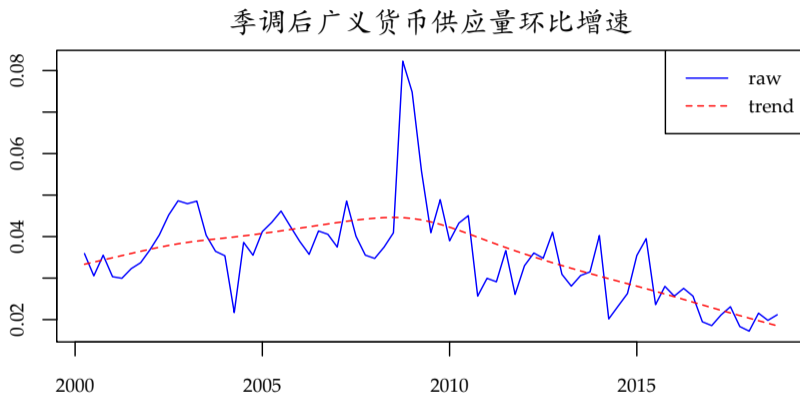
$$\{\tilde{X}_t\} = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{t=1}^T (X_t - \tilde{X}_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} (\tilde{X}_{t+1} - 2\tilde{X}_t + \tilde{X}_{t-1}) \right\}$$

其中  $X_t - \tilde{X}_t$  即为滤波所得周期项

- 对年度、季度、月度数据,  $\lambda$  分别取值 6.25、1,600 与 129,600
- HP 滤波是经济中最流行的滤波算法, 为 Hodrick & Prescott 的缩写
  - R 中 `mFilter` 包有 HP 滤波函数 `hpfilter`
  - 更理想的滤波算法为 BP (band pass) 滤波: 只保留特定频率区间的数据周期波动



## HP 滤波示例：M2 增速



- HP 滤波有效去除了原始增速序列中低频、长周期（趋势）部分；且允许非线性趋势