金融学 2023 年秋 · 时间序列

第 15 讲：状态空间模型与 Markov 区制转换模型简介

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2023 年 12 月 18 日

本讲内容

本节内容

状态空间模型

- 前面课程中介绍的平稳时间序列，其动态特征都通过动态方程直接进行刻画
    - ARMA/VAR/ARCH/GARCH
    - 其核心都可以归结为（低阶）AR 动态方程 + （低阶）MA 动态方程
- 在基础的时间序列动态方程之上，可以考虑复合的时间序列过程：状态变量满足一个动态方程，观测变量又是状态变量的一个函数，以及可能的额外误差项（噪音），即<u>状态-空间表示</u> (state-space representation)

状态空间模型的例子

- 考虑 $Y_t = X_t + w_t$，其中 $\{w_t\}$ 为白噪声过程；而 X_t 为 AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$，$\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声过程，且与 w_t 无关
  - 上述动态系统可以写为两（组）方程的状态空间表示：

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$Y_t = X_t + w_t$$

    其中第一个方程为状态动态 (state dynamics) 方程，第二个方程为空间观测 (space observation) 方程
  - 进一步变化可以发现 Y_t 为 ARMA(1,1) 过程：

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \underbrace{w_t - \phi w_{t-1} + \varepsilon_t}_{\text{可验证这是一个 MA(1) 过程}}$$

状态空间模型的常见形式

- 状态空间模型的常见形式：状态变量 $\boldsymbol{X}_t$ 为 $r\times 1$ 向量，观测变量 $\boldsymbol{Y}_t$ 为 $n\times 1$ 向量，外生变量 $\boldsymbol{Z}_t$ 为 $k\times 1$ 向量，满足如下（线性）动态方程系统

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_t &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1}+\boldsymbol{v}_t \\
\boldsymbol{Y}_t &= \boldsymbol{H}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{X}_t+\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}_t+\boldsymbol{w}_t
\end{aligned}
$$

- 其中 $\boldsymbol{v}_t$ 为状态方程零均值白噪声冲击（向量），满足 $\mathbb{E}\boldsymbol{v}_t\boldsymbol{v}_t^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{Q}$，$\mathbb{E}\boldsymbol{v}_t\boldsymbol{v}_{t-j}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{0}\,\forall j\neq 0$；$\boldsymbol{w}_t$ 为观测方程零均值白噪声冲击（向量），满足 $\mathbb{E}\boldsymbol{w}_t\boldsymbol{w}_t^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{R}$，$\mathbb{E}\boldsymbol{w}_t\boldsymbol{w}_{t-j}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{0}\,\forall j\neq 0$；且两组白噪声无关 $\mathbb{E}\boldsymbol{v}_t\boldsymbol{w}_{t-j}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{0}\,\forall j$
- $\boldsymbol{F}$ 为状态动态方程系数矩阵，该方程说明 $\boldsymbol{X}_t$ 是一个 VAR 过程；$\boldsymbol{H},\boldsymbol{A}$ 为观测方程系数矩阵，写转置形式是与多元回归方程写法保持一致

状态空间模型的等价形式与变量关系

- 将外生变量 $\boldsymbol{Z}_t$ 在观测方程中单独写出，通常是为了突出观测变量 $\boldsymbol{Y}_t$ 不仅受内生状态变量 $\boldsymbol{X}_t$ 影响
  - 特例：观测方程中的常数项，$\boldsymbol{Z}_t = [1, \ldots, 1]^\mathsf{T}$
- 但实际上可以将 $\boldsymbol{Z}_t$ 与 $\boldsymbol{X}_t$ 合并，定义 $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = [\boldsymbol{X}_t^\mathsf{T}, \boldsymbol{Z}_t^\mathsf{T}]^\mathsf{T}$，并将各系数矩阵、白噪声向量用零矩阵（分块）做相应拓展，可以得到如下等价的状态空间表示：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{X}}_t &= \widetilde{\boldsymbol{F}}\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_t \\
\boldsymbol{Y}_t &= \widetilde{\boldsymbol{H}}^\mathsf{T}\widetilde{\boldsymbol{X}}_t + \boldsymbol{w}_t
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{Z}_t$ 的外生性体现在 $\mathbb{E}\boldsymbol{Z}_t\boldsymbol{v}_t^\mathsf{T} = \mathbb{E}\boldsymbol{Z}_t\boldsymbol{w}_t^\mathsf{T} = \boldsymbol{0}$

ARMA 过程的状态空间模型估计

- ARMA(p,q) 过程的估计，由于 MA(q) 部分的存在，常规方法不易处理
  - 可以用 OLS 辅助回归的方法，但必然带来有限样本偏误
  - 常规似然函数高度非线性，数值求解稳健性较低
- 状态空间表示提供了一个更便利的极大似然估计路径
  - 需要使用 Kalman 滤波 (filter) 递归算法对似然函数进行计算
  - 该方法对一般的状态空间模型均适用

ARMA 过程的状态空间表示：直接方法——兜圈子

- 考虑 ARMA(p,q) 过程

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 定义 $\boldsymbol{X}_t = [Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-p}, \varepsilon_t, \ldots, \varepsilon_{t-q}]^\intercal$，则可对应定义 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}_t$，使得 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$
- 相应的

$$\boldsymbol{H} = [\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_0, \ldots, \theta_q]$$

  则 $Y_t = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_t$
- 上述状态空间表示不简洁：$\boldsymbol{F}$ 中同样包含 $\{\phi_i\}, \{\theta_j\}$，实质是同义反复

ARMA 过程的状态空间表示：紧凑方法

- 令 $r = \max(p, q+1)$，并补充定义 $\phi_i = 0$，若 $p < i \le r$；以及 $\theta_j = 0$，若 $q < j \le r$；此时 Y_t 可写为

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_r Y_{t-r} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_{r-1} \varepsilon_{t-r+1}$$

- 定义 $\boldsymbol{X}_t = [X_{1t}, \ldots, X_{rt}]$ 满足如下状态方程

$$\boldsymbol{X}_t = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{r-1} & \phi_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}_{t-1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

定义观测方程 $Y_t = [\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}]\boldsymbol{X}_t$，可验证 Y_t 满足前述 ARMA(p, q) 方程

ARMA 过程状态空间表示：推导

- 从状态方程第二行开始可知 $X_{2t} = X_{1t-1}, \ldots, X_{rt} = X_{r-1,t-1}$，故 $X_{jt} = X_{j-1,t-1} = \mathscr{L} X_{j-1,t} = \cdots = \mathscr{L}^{j-1} X_{1t}$
- 从状态方程第一行可知

$$
\begin{aligned}
X_{1t} &= \phi_1 X_{1t-1} + \cdots + \phi_r X_{r,t-1} + \varepsilon_t = (\phi_1 + \phi_2 \mathscr{L} + \cdots + \phi_r \mathscr{L}^{r-1}) X_{1t-1} + \varepsilon_t \\
&\Leftrightarrow (1 - \phi_1 \mathscr{L} - \phi_2 \mathscr{L}^2 - \cdots - \phi_r \mathscr{L}^r) X_{1t} = \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

- 观测方程可写为

$$
Y_t = (\theta_0 + \theta_1 \mathscr{L} + \cdots + \theta_{r-1} \mathscr{L}^{r-1}) X_{1t}
$$

两端乘以 $(1 - \phi_1 \mathscr{L} - \phi_2 \mathscr{L}^2 - \cdots - \phi_r \mathscr{L}^r)$ 可得

$$
(1 - \phi_1 \mathscr{L} - \phi_2 \mathscr{L}^2 - \cdots - \phi_r \mathscr{L}^r) Y_t = (\theta_0 + \theta_1 \mathscr{L} + \cdots + \theta_{r-1} \mathscr{L}^{r-1}) \varepsilon_t
$$

本节内容

1. 状态空间模型
2. Markov 区制转换模型

Markov 区制转换模型介绍

- 区制转换 (regime switching) 模型：时间序列 $\{X_t\}$ 的动态变化方程，不但取决于 X_t 滞后期及白噪声冲击项，还取决于离散区制变量 $s_t \in \mathcal{S} \equiv \{1, \ldots, S\}$
- 典型例子：GDP 增速序列的时序变化，不但取决于滞后期，还取决经济整体情况是扩张 (expansion) 期还是紧缩 (recession) 期，可用两区制 $s_t \in \{1, 2\}$ 模型来描述
- Markov 区制转换 (MRS)：s_t 的变化可以用一个 Markov 链（马氏链）来描述：给定当前区制取值 $s_t = i$，则下一期区制取值 $s_{t+1} \in \mathcal{S}$ 的（条件）分布 $\mathbb{P}(s_{t+1}|s_t = i)$ 完全知晓

Markov 链介绍

- Markov 链是一类应用最广泛的随机过程模型，其核心特征是给定当前状态 s_t，下期状态 s_{t+1} 的条件分布完全确定，即 $\mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i)$ 完全确定
  - 此处 s_t 理解为一般的“状态”概念，而非前页区制
- 上述条件概率又称为（条件）转移概率 (transition probability)；若转移概率取值与 t 无关，只与前后两期的状态取值 i, j 有关，则称该 Markov 链为时齐 (time homogeneous) Markov 链，并将转移概率记做 $p_{ij} \equiv \mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i)$
- 转移概率可以写为 $S \times S$ 矩阵 $\boldsymbol{P}$：

$$\boldsymbol{P} = [p_{ij}]_{1 \leq i,j \leq S} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{S1} & \cdots & p_{SS} \end{bmatrix}$$

且 $\boldsymbol{P}$ 满足每一行求和为 1；$\boldsymbol{P}$ 成为转移矩阵 (transition matrix)

时齐 Markov 链的分布及动态演化

- 若 t 期状态 s_t 的分布为 $\boldsymbol{\pi}_t = [\pi_{1t}, \ldots, \pi_{St}]$，则由转移概率定义可知 s_{t+1} 的概率分布为

$$\mathbb{P}(s_{t+1} = j) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(s_{t+1} = j, s_t = i) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(s_t = i)\mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_{it} p_{ij}$$

- 写为矩阵形式，可知

$$\boldsymbol{\pi}_{t+1} = [\pi_{1t+1}, \ldots, \pi_{St+1}] = \boldsymbol{\pi}_t \boldsymbol{P}$$

- 给定初始分布 $s_0 \sim \boldsymbol{\pi}_0$，$s_t$ 的分布为 $\boldsymbol{\pi}_t = \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{P}^t$
  - 有一整套关于 Markov 链极限分布 (limiting distribution) 的理论，即分析 $\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{P}^t$ 的性质

时齐 Markov 链的平稳分布

- 对转移矩阵为 $\mathbb{P} = [p_{ij}]_{i,j\in\mathcal{S}}$ 的时齐 Markov 链，若分布 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \ldots, \pi_S]$ 满足 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$，则称 $\boldsymbol{\pi}$ 为该 Markov 链的平稳分布 (stationary distribution)
  - 平稳分布又称为不变分布 (invariant distribution)
- 平稳分布的涵义：若 s_t 处于平稳分布，则 $s_{t+\tau}$，$\tau \geq 1$ 的分布都为平稳分布，即分布不再变化
- 考虑 $S = 2$ 的时齐 Markov 链，转移矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \rho & 1-\rho \\ 1-\rho & \rho \end{bmatrix}$$

其中 $\rho \in (0,1)$，则可验证平稳分布 $\boldsymbol{\pi} = [0.5, 0.5]$

Markov 区制转换自回归模型

- 时间序列中，一类应用极广的区制转换模型为 Markov 区制转换 p-阶自回归 (MRS AR(p)) 模型，其一般形式可写为

$$X_t - \mu(s_t) = \phi_1(s_t)(X_{t-1} - \mu(s_{t-1})) + \cdots + \phi_p(s_t)(X_{t-p} - \mu(s_{t-p})) + \sigma(s_t)\varepsilon_t$$

  其中 s_t 表示 t 期所处区制，为时齐 Markov 链；$\mu(\cdot)$, $\phi_j(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ 为依赖于区制的截距项、自回归系数及白噪声标准差；$\{\varepsilon_t\}$ 为 iid 白噪声序列，通常假设与 $\{s_t\}$ 相互独立
- 这类模型可以描述时间序列中离散变化的水平值、自相关性、波动率跳跃
- MRS AR 模型通常都是用极大似然估计方法进行参数估计
  - 技术介绍可见 Hamilton (2016) “Macroeconomic Regimes and Regime Shifts,” Handbook of Macroeconomics, vol.2A, chapter 3

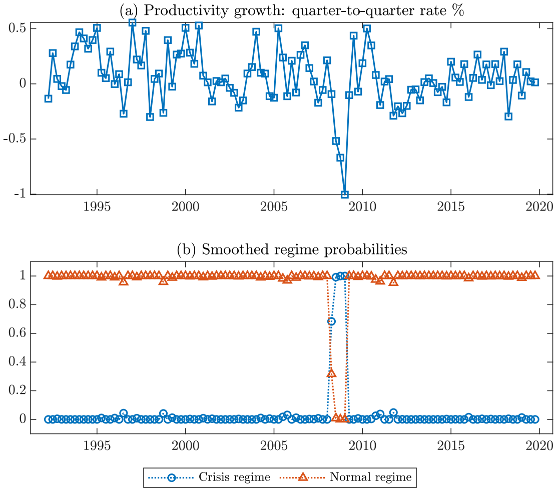
MRS AR(1) 示例

- 很多国家的产出或生产率 (TFP 或劳动生产率) 会呈现区制转移特征：正常时期是一个区制，危机时期是一个区制
- 最简单的建模方式为 MRS AR(1) 模型：

$$X_t = (1 - \rho(s_t))\mu(s_t) + \rho(s_t)X_{t-1} + \sigma(s_t)\varepsilon_t$$

- 这类特定的模型可以用迭代 EM (expectations maximization) 算法大幅提高 MLE 的计算效率

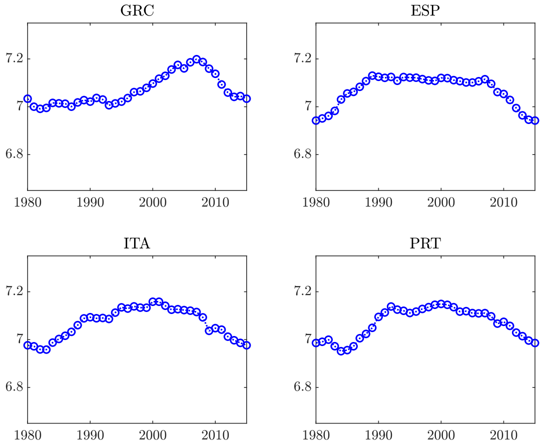
意大利劳动生产率增速序列的 MRS AR(1) 建模



估计结果

	$\mu(s)$	$\rho(s)$	$\sigma(s)$	P	$s'=1$	$s'=2$	不变分布
$s=1$ 危机	-0.0336	0.9018	0.0009	$s=1$	0.6633	0.3367	0.0372
$s=2$ 正常	0.0009	0.2167	0.0020	$s=2$	0.0130	0.9870	0.9628

欧债危机示例：GIPS 四国劳动生产率序列



欧债危机示例：GIPS 四国劳动生产率 MRS AR(1) 建模估计