金融学 2023 年秋 · 时间序列

第 14 讲：随机趋势、单位根与协整模型

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2023 年 12 月 11 日

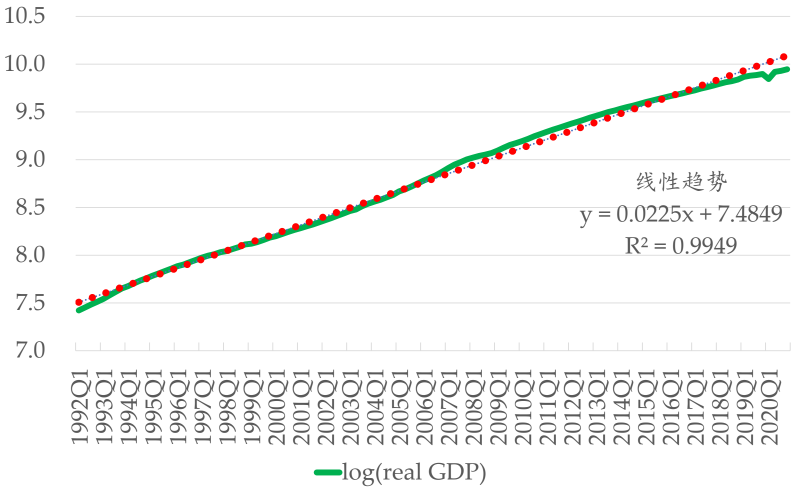
本讲内容

本节内容

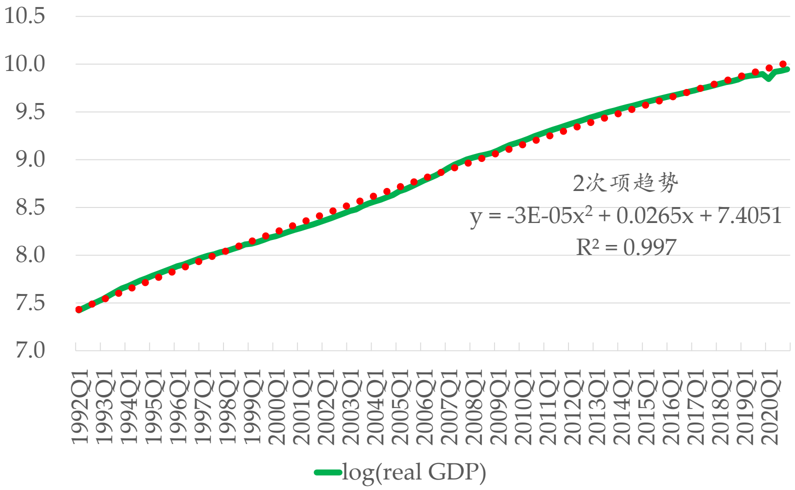
时间序列的趋势

- 时间序列样本 $\{X_t\}_{t=1}^T$，可能包含趋势 $X_t = X_t^{\text{trend}} + X_t^{\text{cycle}}$
- 确定性趋势：X_t^{trend} 是时间 t 的确定函数 $f(t)$
  - 线性趋势：$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$
  - 高阶多项式趋势：$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k$
  - 指数趋势：$f(t) = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 t)$
  - 对数趋势：$f(t) = \log(\alpha_0 + \alpha_1 t)$
- 随机趋势 (stochastic trend)：X_t 的 1 阶或高阶差分为平稳过程，如 $\Delta X_t = (1 - \mathscr{L})X_t = X_t - X_{t-1}$ 平稳
  - 最常用差分平稳模型为 ARIMA(p, i, q) 模型：$\Delta^i X_t = (1 - \mathscr{L})^i X_t \equiv \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{i\text{次}} X_t$ 为一个 ARMA(p, q) 过程

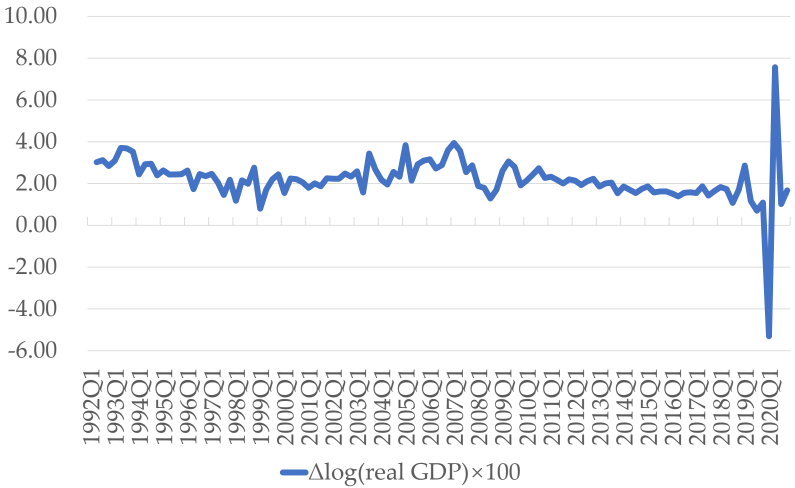
中国季度实际 GDP 对数：线性趋势



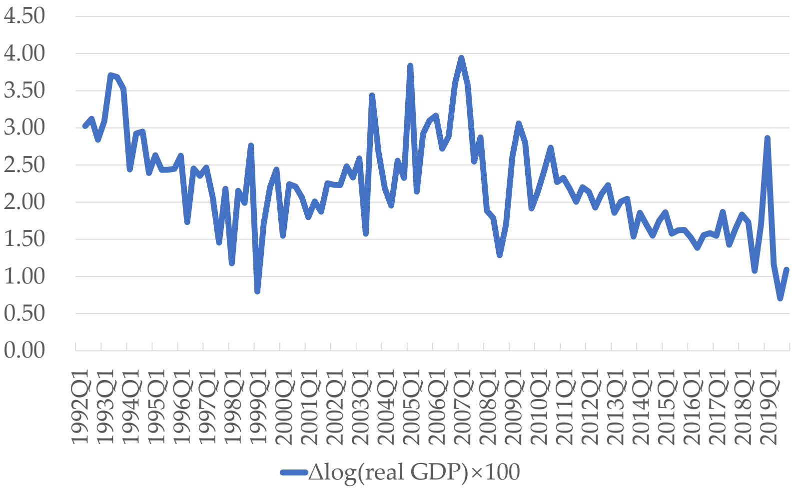
中国季度实际 GDP 对数：2 次趋势



中国季度实际 GDP 对数差分（环比增速）：1992Q2–2020Q4



中国季度实际 GDP 对数差分（环比增速）：1992Q2–2019Q4



本节内容

最简单的随机趋势模型：单位根过程

- 给定时间序列 $\{X_t\}$，若 X_t 不平稳而 ΔX_t 为一个平稳过程，则称 $\{X_t\}$ 为单位根过程 (unit root process)
- 记 $\alpha_0 + u_t = \Delta X_t$ 为单位根过程 $\{X_t\}$ 差分后的平稳序列，其中 α_0 为常数，$\mathbb{E}u_t = 0$，则 X_t 可表示为

$$X_t = \alpha_0 + X_{t-1} + u_t$$

  其中 α_0 为常数，称为漂移项 (drift)

  - 上式的特征多项式为 $A(\mathscr{L}) = 1 - \mathscr{L}$，零点为 1，故相应得名单位根 unit root

单位根过程的特例：随机游走过程

- 若单位根过程 $\{X_t\}$ 差分得到一个白噪声过程 $\{\varepsilon_t\}$，则称其为随机游走 (random walk) 过程，此时有

$$X_t = \alpha_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- 若 ε_t 为 iid 序列，若 $\alpha_0 = 0$，条件期望满足如下性质：
  $\mathbb{E}_t X_{t+1} \equiv \mathbb{E}[X_{t+1}|\Omega_t] = \mathbb{E}[X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \ldots] = X_t$
  - 满足 $\mathbb{E}_t X_{t+1} = X_t$ 的随机过程又称为鞅 (martingale)
  - 若 $\{X_t\}$ 为鞅，则 $\mathbb{E}_{t-1}\Delta X_t = \mathbb{E}[X_t - X_{t-1}|\Omega_{t-1}] = X_{t-1} - X_{t-1} = 0$，故得鞅差序列的这一名称
- 有效市场假说 (Efficient Market Hypothesis) 中的弱及半强有效市场特征，即可以表示为证券价格 P_t 或收益率 r_t 序列是一个鞅过程

单位根过程的趋势

- 给定随机游走序列 $Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t$ 为 iid 白噪声序列，则

$$Z_t = Z_0 + \beta_0 t + \underbrace{\varepsilon_t + \cdots + \varepsilon_1}_{\text{随机趋势}}$$

  - $\mathbb{E}_t[Z_{t+s}] = \mathbb{E}_t[Z_0 + \beta_0(t+s) + \varepsilon_{t+s} + \cdots + \varepsilon_t + \cdots + \varepsilon_1] = Z_0 + \beta_0(t+s) + \varepsilon_t + \cdots + \varepsilon_1$，故 ε_j, $j = 1, \ldots, t$ 对未来 Z_{t+s} 的影响永远存在，不会衰减

- 单位根过程允许存在 1 阶线性时间趋势：定义

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + Z_t$$

则 $\Delta X_t = \alpha_1 + \Delta Z_t = \alpha_1 + \beta_0 + \varepsilon_t$ 为平稳序列

更一般的随机趋势模型：d-阶单整模型

- 给定时间序列 $\{X_t\}$，若有正整数 d 使得 $\Delta^d X_t$ 平稳而 $\Delta^{d-1} X_t$ 不平稳，则称 $\{X_t\}$ 为 d-阶单整过程 (integrated process)，记做 I(d) 过程
  - ARIMA(p, i, q) 过程即为 I(i) 过程
- 单位根过程是一类特殊的 1-阶单整过程 I(1)：当且仅当 1-阶差分后为平稳过程
  - 可以证明 Beveridge-Nelson 分解：任何一个 I(1) 过程 X_t 可分解为 $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + Z_t + u_t$，其中 Z_t 为随机游走过程，u_t 为平稳过程
- I(d) 过程 $\{X_t\}$ 可以刻画 d-阶时间趋势
  - 定义 $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_d t^d + Z_t$，其中 Z_t 满足 $\Delta^d Z_t = \varepsilon_t$ 为 iid 白噪声，则 X_t 是 I(d) 过程

检验单位根：以无漂移的随机游走过程为例

- 考虑 AR(1) 模型 $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t$ 为 iid 白噪声，且原假设 H_0 下有 $\rho = 1$，即 H_0 下 X_t 为无漂移的随机游走过程
- 给定样本 $\{X_t\}_{t=0}^T$，ρ 的 OLS 估计满足

$$\hat{\rho} - 1 = \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2} - 1 = \frac{\sum_{t=1}^T \Delta X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2}$$

- 两端乘以 T 可得

$$T(\hat{\rho} - 1) = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \Delta X_t X_{t-1}}{\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2} \tag{1}$$

检验单位根：以无漂移的随机游走过程为例

- 由于 X_t 不平稳，因此对 (1) 式的分子、分母无法使用大数定律来确定 $T \to \infty$ 时的极限
- 假设 $X_0 = 0$，H_0 下，$X_t = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t$，故 $\mathbb{E}X_t^2 = t\sigma_\varepsilon^2$，由此知 (1) 式的分母 $\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2$ 是 T^2 阶大小，由此可猜想 $T \to \infty$ 时 $\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2$ 极限收敛到一个随机变量
- 借助比较深入的概率论工具，可以证明，(1) 式分子、分母分别收敛到如下两个随机变量

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}B(1)^2 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}, \qquad \sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 B(s)^2 \mathrm{d}s$$

  其中 $B(s)$ 为标准 Brown 运动，即连续时间下的随机过程，$s \in [0,1]$，满足 $B(0) = 0$

Brown 运动的定义

对于定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的连续时间随机过程 $\{B_t : t \geq 0\}$，即对固定的 $\omega \in \Omega$，$B_t(\omega)$ 是关于 t 的函数，若满足下述 3 个条件：

1. 对任意 $t \geq 0, s > 0$，$B(t+s) - B(t)$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2 s)$
2. 对任意 $0 < t_1 < \cdots < t_n$，$B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ 相互独立，即独立增量条件
3. 对几乎所有 $\omega \in \Omega$，$B_t(\omega)$ 是 t 的连续函数

则称 $\{B_t : t \geq 0\}$ 为一个 (一维) Brown 运动

注　事实上，概率空间中的样本空间 Ω 即取为 $[0, \infty)$ 上的连续函数集合 $\mathcal{C}[0, \infty)$，同时定义一个概率测度 $\mathbb{P}$，保证上述条件 1 和 2 得到满足

DF 单位根检验：无漂移的随机游走过程

- 上述结果说明，无漂移的随机游走原假设下，

$$T(\hat{\rho}-1) \xrightarrow{d} \frac{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}B(1)^2 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}}{\sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 B(s)^2 \mathrm{d}s} = \frac{\frac{1}{2}(B(1)^2-1)}{\int_0^1 B(s)^2 \mathrm{d}s} \equiv DF_\rho$$

- 该检验统计量最早由 Dickey 与 Fuller 各自在 1976 年提出，故称为 DF ρ-统计量；相应的检验称为 DF 检验
  - 同时有与 ρ-统计量等价的 t-统计量：$DF_t \equiv \frac{\frac{1}{2}(B(1)^2-1)}{\sqrt{\int_0^1 B(s)^2 \mathrm{d}s}}$
- DF 统计量的分布函数没有显性表达，但很容易通过随机模拟进行计算

DF 单位根检验：含有常数项与时间趋势的情形

- 考虑一般的设定 $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + Z_t$，其中 $Z_t = \rho Z_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t$ 为 iid 白噪声过程
- 原假设 H_0 下 Z_t 为无漂移的随机游走过程 $Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t$，即 $\rho = 1$，此时 X_t 是一个含常数项与时间趋势的单位根过程
- 为检验原假设 $H_0 : \rho = 1$，将 X_{t-1} 的表示式两端乘以 ρ 并从 X_t 表达式两端减去，可以得到

$$X_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* t + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$$

  其中 $\alpha_0^* = (1-\rho)\alpha_0 + \rho\alpha_1$，$\alpha_1^* = (1-\rho)\alpha_1$
- 对上式进行 OLS 估计，可类似得到 DF 统计量 $T(\hat{\rho}-1)$，其极限分布同样涉及 Brown 运动

DF 单位根检验的局限与 ADF 检验

- DF 单位根检验中，单位根过程 X_t 的差分项 ΔX_t 在原假设下为一个白噪声（可能含有截距项），因此 DF 检验仅能处理简单的随机游走类型 I(1) 过程
- 但数据中常出现的情况是 ΔX_t 具有序列相关性，此时简单的 DF 检验无法使用
- ADF (augmented Dickey-Fuller) 检验：原假设下 X_t 为 I(1) 过程，且 ΔX_t 为 AR(p) 过程，此时对 X_t 的单位根检验称为 ADF 检验
  - 例如 ΔX_t 满足 $\Delta X_t = \zeta_1 \Delta X_{t-1} + \cdots + \zeta_p \Delta X_{t-p} + \varepsilon_t$，具有自相关结构，此时 X_t 为一个 ARIMA$(p, 1, 0)$ 过程

ADF 检验：一般情况

- ADF 检验的最一般情况同时考虑常数项与时间趋势：

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \rho X_{t-1} + \zeta_1 \Delta X_{t-1} + \cdots + \zeta_p \Delta X_{t-p} + \varepsilon_t$$

- 利用上式的 OLS 估计，可以构造如下的 ADF 检验统计量

$$\frac{T(\hat{\rho}-1)}{1-\hat{\zeta}_1-\cdots-\hat{\zeta}_p}$$

  其极限分布同样涉及 Brown 运动

- 与 DF 检验一致，ADF 也有不含常数项或时间趋势的版本；是否选择包括常数项或时间趋势的设定，应参考（经济）理论依据

本节内容

多维单位根过程

- 经济或者金融中，经常需要将多个单位根序列放在一块进行分析
  - 对数 GDP、对数 M2 序列同时建模分析，货币数量论的基础
  - 多类大宗商品价格，以及相应的期货价格
  - 股票价格与市场指数，或其他定价因子指数序列
- 与单变量类似，称 $n \times 1$ 维向量 $\boldsymbol{X}_t$ 为 n-维单位根过程，若 $\boldsymbol{X}_t$ 不是向量平稳过程，但 $\Delta \boldsymbol{X}_t$ 是向量平稳过程
  - $\boldsymbol{X}_t$ 中至少有一个分量不是平稳过程
  - $\Delta \boldsymbol{X}_t$ 表示对每一个分量求差分

协整模型

- 将两个或多个单位根变量放在一块考察时，通常有理论依据，认为这些单位根变量之间存在稳定关联
- 简化假设：单位根变量间的稳定关联，可以表示为这组单位根变量间一个特定线性组合，产生一个平稳变量
  - 例如股票指数 M_t 与指数 ETF (exchange traded fund) 价格 P_t 间，若无套利条件成立，则应满足近似比例关系 $P_t = \gamma_t M_t$，其中 γ_t 表示流动性冲击等因素引起的短期价格偏离，为平稳过程；相应的对数形式为 $\log P_t = \log \gamma_t + \log M_t$，故 $\log P_t - \log M_t = \log \gamma_t$ 平稳，但 $\log P_t, \log M_t$ 各自包含单位根
- 此时称这些单位根变量为协整 (cointegrated) 变量，相应的多维单位根过程为协整过程

协整向量与矩阵

- 假设 n-维单位根过程 $\boldsymbol{X}_t$ 中总共有 $h \le n$ 组协整关系，其中每组关系对应的系数（列）向量为 $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$，$i = 1, \ldots, h$，即 $\boldsymbol{a}_i^\intercal \boldsymbol{X}_t$ 平稳；将这组向量列为矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_h]$，称为协整矩阵
- 定义 $h \times 1$ 向量 $\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{A}^\intercal \boldsymbol{X}_t$ 为误差 (error) 向量，即各单位根变量间发生的短期暂时性偏离

向量误差修正模型

- Granger 证明了如下结果：若 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 t + \boldsymbol{W}_t$ 中的向量单位根过程 $\boldsymbol{W}_t$ 满足 VAR(p) 方程，白噪声过程为 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$，则存在 $n \times h$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{X}_t$ 可表示为如下形式：

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\alpha}_0^* + \boldsymbol{\alpha}_1^* t - \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_t + \zeta_1 \Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \zeta_{p-1} \Delta \boldsymbol{X}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

  称为向量误差修正模型 (vector error-correction model, VECM)
  - 注意，$\boldsymbol{W}_t$ 所满足的 VAR(p) 方程不满足平稳性条件
  - 上述结果称为 Granger 表示定理
- VECM 形式意味着协整变量间的短期偏离（误差）在向量动态中，会自动得到纠正，以保证协整变量间恢复到长期稳定关系中
- 这一长期稳定关系具有变量间长期均衡的涵义