

金融学 2023 年秋 · 时间序列

第 13 讲：随机波动率与条件异方差模型

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2023 年 12 月 4 日

本讲内容

- ① 波动率的时间序列特征
- ② ARCH 模型
- ③ GARCH 模型

本节内容

- 1 波动率的时间序列特征
- 2 ARCH 模型
- 3 GARCH 模型

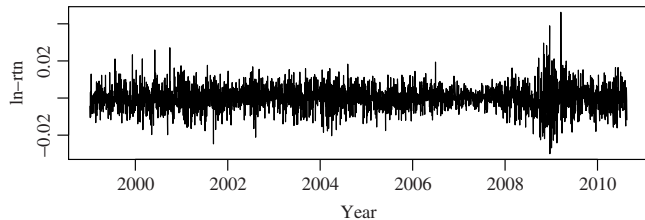
金融时间序列中的波动率动态特征

随机波动率 (stochastic volatility): 金融时间序列 (如收益率) 各个时期的波动水平并非恒定不变, 而会随时间发生变化; 可总结为如下特征

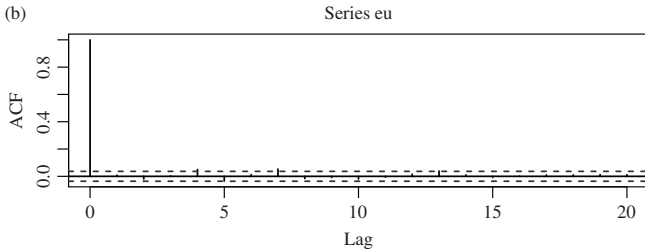
- ① 波动率聚集 (clustering): 波动率会在一定时期 (通常较短) 明显变高, 而在其他时期 (通常较长) 维持低位
- ② 波动率的跳跃不常见, 而倾向于连续变化
- ③ 波动率是在有限范围内变化, 而不会趋近于无穷
- ④ 时间序列自身的水平值发生较大变化后, 波动率通常会增加
 - 如资产价格序列发生明显上升或下降后, 其波动率会出现上升趋势

示例：美元-欧元汇率日度收益率及自相关性，1999.1.4–2010.8.4

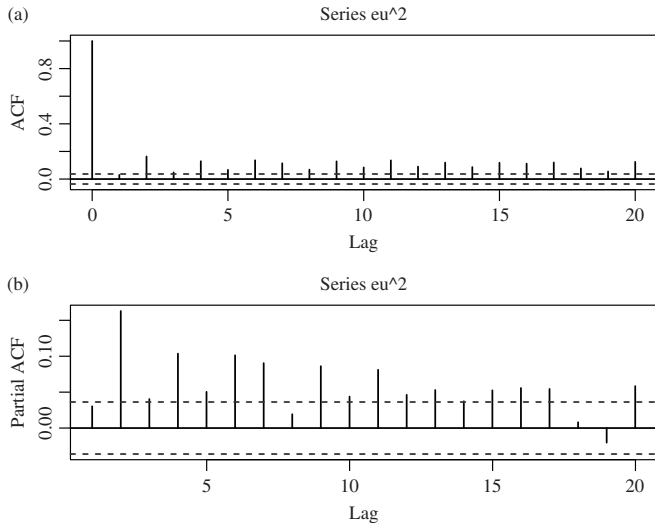
(a)



(b)



示例：前页收益率平方项具有自相关性



随机波动率：理论内涵与测算

- 随机波动率旨在捕捉可观测的时间序列 $\{X_t\}$ 的二阶矩随时间随机变化的特征
 - 以收益率序列 $\{r_t\}$ 为例，若 Ω_{t-1} 表示 $t-1$ 期的信息集（如到该期为止所有的公开信息，包括收益率本身），则可计算条件期望收益及其条件方差

$$\mu_t = \mathbb{E}[r_t | \Omega_{t-1}], \quad \sigma_t^2 = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \Omega_{t-1}]$$

后者即称为 $\{r_t\}$ 的（条件）波动率

- 随机波动率：若 σ_t^2 为具有一定概率结构的随机过程
- 随机波动率的理论测度： $\sigma_t^2 = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)^2 | \Omega_{t-1}]$ 的计算依赖于对 $\{X_t\}$ 时序模型的设定

随机波动率：样本测算与近似

- 给定样本 $\{X_t\}_{t=1}^T$ ，虽然 σ_t^2 的理论值依赖于模型设定，但仍然可以通过 X_t^2 ，反映其波动率的随机动态特征
 - 第5页计算收益率平方项自相关系数及偏自相关系数的原因
 - 更精确的“直接”测算：建立 $\{X_t\}$ 本身水平值的时序模型，如 $AR(p)$ ，则可以计算 $t-1$ 期 X_t 的最小均方预测 $\hat{X}_{t|t-1}$ ，进而用预测误差平方项 $(X_t - \hat{X}_{t|t-1})^2$ 来刻画潜在的随机波动率
- 另一种方法：不同时间段波动率实现值 (realized volatility)
 - 如用每个月各个日度回报率来计算该月的实现波动率
 - 或者更为粗糙但常用的滚动窗口波动率 (rolling window volatility)：用 t 到 $t-m$ 期的实现值 $\{X_{t-i}\}_{i=0}^m$ 来计算样本方差 $\hat{\sigma}_{m,t}^2$

本节内容

- 1 波动率的时间序列特征
- 2 ARCH 模型
- 3 GARCH 模型

ARCH 模型的基本结构

- ARCH (autoregressive conditional heteroskedastic) 模型：自回归条件异方差，Robert Engle 1982 年提出
- m -阶 ARCH 模型 ARCH(m) 的经典表示：给定 iid 白噪声过程 $\{v_t\}$ ，期望 $\mathbb{E}v_t = 0$ ，方差 $\sigma_v^2 = 1$ ，则 $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$ 称为 ARCH(m) 模型，若 h_t 满足

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$$

- **参数限制**： $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 并不能任意取值，而需要满足一些列限定条件，才能保证 h_t 进而 u_t 有意义
- 常用记号：经常将 h_t 记做 σ_t^2 ，便于提示“随机波动率”的本意

ARCH 模型的性质：条件期望与方差

- 定义信息集 $\Omega_{t-1} = \{u_{t-1}, u_{t-2}, \dots\}$, 则 v_t 独立于 Ω_{t-1}
- 进一步有, $\mathbb{E}[u_t | \Omega_{t-1}] = \sqrt{h_t} \mathbb{E}[v_t | \Omega_{t-1}] = \sqrt{h_t} \mathbb{E}v_t = 0$
- 由 ARCH 模型的定义可知 $u_t^2 = h_t \cdot v_t^2$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] &= \mathbb{E}[(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2) v_t^2 | \Omega_{t-1}] \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2) \mathbb{E}[v_t^2 | \Omega_{t-1}] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 \end{aligned}$$

其中第 2 个等号的原因在于 $\mathbb{E}[v_t^2 | \Omega_{t-1}] = \mathbb{E}[v_t^2] = 1$

- 由此知, u_t 的条件方差 $\sigma_{u,t}^2 \equiv \text{var}(u_t | \Omega_{t-1}) = \mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}]$ 由其自身的滞后项平方决定

ARCH 过程参数限制

- 首先，由于 $\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$ ，为确保右端取值大于 0，故要求

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0 \quad (1)$$

- 其次，由于 $\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$ 具有一个以 u_t^2 为变元的 AR(m) 过程，因此要求其对应的特征多项式 $P(z)$ 满足

$$P(z) = 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_m z^m \neq 0, \quad \forall |z| \leq 1 \quad (2)$$

即 $P(z)$ 所有零点位于复平面单位圆外

ARCH 过程的无条件矩

- 由 $\mathbb{E}[u_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t|\Omega_{t-1}]] = \mathbb{E}[0] = 0$ 可知 u_t 的 1-阶矩平稳
- 由

$$\mathbb{E}[u_t^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}]] = \alpha_0 + \alpha_1\mathbb{E}[u_{t-1}^2] + \cdots + \alpha_m\mathbb{E}[u_{t-m}^2]$$

可知, 若 $\mathbb{E}[u_t^2]$ 平稳, 则

$$\mathbb{E}[u_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_m}$$

- $P(z)$ 零点位于单位圆外意味着 $P(1) = 1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_m \neq 0$, 故 u_t 无条件 2-阶矩大于 0 进一步限制了参数取值

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m < 1 \quad (3)$$

ARCH 过程是鞅差过程

- ARCH 过程满足鞅差过程的定义： $\mathbb{E}[u_t | \Omega_{t-1}] = 0$
- 故 ARCH 过程不具有序列相关性： $\forall j = 1, 2, \dots,$

$$\mathbb{E}[u_t u_{t-j}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t u_{t-j} | \Omega_{t-1}]] = \mathbb{E}[u_{t-j} \mathbb{E}[u_t | \Omega_{t-1}]] = 0$$

即 $\text{cov}(u_t, u_{t-j}) = 0$

ARCH 模型的回归表示

- 定义 $\eta_t \equiv u_t^2 - \mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}]$, 则可直接验证 $\{\eta_t\}$ 为鞅差序列,
 $\mathbb{E}[\eta_t] = \mathbb{E}[\eta_t | \eta_{t-1}, \eta_{t-2} \dots] = \mathbb{E}[\eta_t | \Omega_{t-1}] = 0$
 - 当参数 $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ 满足进一步条件时, 可以证明 $\mathbb{E}[\eta_t^2]$ 存在, 故 $\{\eta_t\}$ 是序列无关、鞅差白噪声过程
- 由 $\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2$, 可得 ARCH 模型的平方项自回归 AR(m) 表示:

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + \eta_t$$

- 此回归表示可用来对 ARCH 模型进行估计, 选择阶数 m , 预测波动率, 或检验序列 $\{u_t\}_{t=1}^T$ 是否具有 ARCH 特征
 - 借助上式可说明 $P(z)$ 满足条件 (2) 时, u_t^2 方为平稳序列

ARCH 模型的极大似然估计

- ARCH 模型的常规估计方法为极大似然估计
- 假设 $v_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$, 则 $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$ 在 Ω_{t-1} 下的条件概率密度为 $f(u_t | \Omega_{t-1}) = (2\pi h_t)^{-1} \exp(-0.5u_t^2/h_t)$
- 给定 ARCH(m) 样本序列 $\{u_t\}_{t=1}^T$, $T > m$, 则条件似然函数

$$L(u_{m+1}, \dots, u_T | \boldsymbol{\alpha}, u_1, \dots, u_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{u_t^2}{2h_t}\right)$$

其中 h_t 可以通过 u_{t-1}, \dots 等递归定义, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0, \dots, \alpha_m]^T$

- 另一个常见分布假设为 v_t 服从 iid 的 Student t -分布

本节内容

- 1 波动率的时间序列特征
- 2 ARCH 模型
- 3 GARCH 模型**

ARCH 模型的优点与缺点

优点

- ① 可以产生波动率聚集： $h_t = \sigma_t^2$ 增加，导致 u_t^2 上升，进而导致 $h_{t+1} = \sigma_{t+1}^2$ 上升
- ② u_t 序列有厚尾特征：可计算 u_t 峰度（当存在时）大于 3

缺点

- ① ARCH 模型对参数取值限制较多
- ② ARCH 模型的简单自回归结构导致其无法捕捉波动率变动的高频结构，进而容易造成波动率过度预测
- ③ ARCH 模型无法区分波动率变动的非线性特征，下一期波动率只取决于冲击 v_t 的平方
- ④ ARCH 模型并没有真正解释波动率变化的来源，而只是对其时序特征进行建模

GARCH 模型的基本结构

- ARCH 模型的缺点带动了大量的后续研究，其中应用最广泛也最成功的，为 GARCH (generalized ARCH) 模型：Engle 的学生 Bollerslev 提出
 - GARCH 模型可以克服前述缺点 2，其拓展可以进一步克服缺点 3
- GARCH 模型 GARCH(m, s) 的经典表示：类似 ARCH，给定 $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$ ，条件方差 h_t 满足

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

- 与 ARCH 类似，此时有

$$\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

GARCH 模型的特征

- 与 ARCH 类似，定义 $\eta_t = u_t^2 - \mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = u_t^2 - h_t$ ，则 $\{\eta_t\}$ 为鞅差白噪声过程，且 $h_t = u_t^2 - \eta_t$
- 此时， h_t 定义式可以改写为

$$u_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) u_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_{t-j}$$

其中 $p = \max(m, s)$ ；上式中对 $i > m$ ，补充定义 $\alpha_i = 0$ ，对 $i > s$ 补充定义 $\beta_i = 0$

- 由上式可知，GARCH 模型下 u_t^2 是一个 ARMA($\max(m, s), s$) 过程，其 MA(s) 部分可以捕捉波动率变动的高频特征

GARCH 模型的参数限制

- 为保证 h_t 非负, 需要 $\alpha_0, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s \geq 0$
- 为保证 u_t^2 平稳, 需要其 ARMA 表示中 AR 部分特征多项式

$$P(z) = 1 - (\alpha_0 + \beta_0)z - \dots - (\alpha_p + \beta_p)z^p \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| \leq 1$$

- 为保证

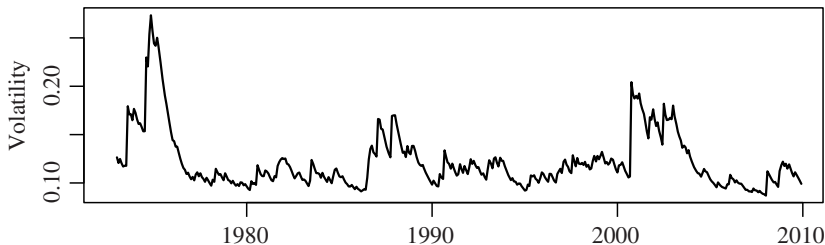
$$\mathbb{E}[u_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i)} > 0$$

需要 $\alpha_0 > 0$ 与 $\sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) < 1$

GARCH 估计与示例

GARCH 模型通常也使用极大似然估计, 其阶数确定可通过 AIC、BIC 等模型选择算法

- R 宏包 fGarch 提供了丰富的 GARCH 建模与分析选项
- 下图显示了对 Intel 股票 1973M1 到 2009M12 月度收益率进行 GARCH(1,1) 建模估计得到的波动率序列 $\sigma_t^2 = h_t$



常见 GARCH 模型拓展

- I-GARCH 模型：单整 (integrated) GARCH，例如 I-GARCH(1,1) 模型

$$u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t, \quad h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + (1 - \beta_1) u_{t-1}^2, \quad 0 < \beta_1 < 1$$

此时 u_t^2 是一个单位根过程

- M-GARCH 模型：均值 (mean) GARCH 模型，例如 M-GARCH(1,1) 模型

$$r_t = \mu + c h_t + u_t, \quad u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t, \quad h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

可用来捕捉金融资产收益率序列 $\{r_t\}$ 中，收益率水平值对波动率的依赖关系

- E-GARCH 模型：指数 (exponential) GARCH 模型，条件波动率具有非对称性，可用于捕捉金融收益率正负取值对未来波动率的差异化影响