2022 秋季本科时间序列

第 4 次作业答案

10 月 10 日

1. (a)

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

将 z, w 视作复平面 $\mathbb{C}$ 上的 2-维向量 $z = [a, b]^\intercal, w = [c, d]^\intercal$

则 zw 可记作 $zw = [ac - bd, bc + ad]^\intercal$

$$zw = \begin{bmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} w$$

故复数乘积 zw 可视作对 w 进行线性变换。

$$\therefore A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

检验复数乘积运算 zw 满足线性变化的性质：

$$A(kw+lz) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kc + la \\ kd + lb \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = k(Aw)+l(Az)$$

(b)

$$|z + w|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd$$

$$(|z| + |w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$$

根据向量版本的 Cauchy-Schwartz 不等式 $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \le ||\boldsymbol{x}|| \times ||\boldsymbol{y}||$

可知 $|z \cdot w| \le ||z|| \times ||w||$，即 $ac + bd \le \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$

故 $|z + w|^2 \le (|z| + |w|)^2$，$|z + w| \le |z| + |w|$ 得证。

(c) i. $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z^2|$，故 $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$。

ii. $\overline{zw} = (ac - bd) - (bc + ad)i$

$\bar{z}\bar{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (bc + ad)i$

$\therefore \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

根据数学归纳法：

当 $n=1$ 时，$\bar{z}=\bar{z}$ 成立；

假设 $n=k$ 时，$\overline{z^k}=\bar{z}^k$ 成立；

当 $n=k+1$ 时，$\overline{z^{k+1}}=\overline{z^k z}=\overline{z^k}\bar{z}=\bar{z}^{k+1}$

$\therefore \overline{z^n}=\bar{z}^n$

iii. $|z^n|=\sqrt{z^n\overline{z^n}}=\sqrt{z^n\bar{z}^n}=(\sqrt{z\bar{z}})^n=|z|^n$

(d) i. 给定大于等于 $|z|$ 的正整数 m

$$
\begin{aligned}
|e^z| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{m^n}{n!} + \sum_{n=m}^{\infty}\frac{m^n}{n!} \\
&\le \sum_{n=0}^{m-1}\frac{m^n}{n!} + \sum_{n=m}^{\infty}\frac{m^m}{m!}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n-m} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1}\frac{m^n}{n!} + \frac{m^m}{m!}\frac{1}{\sum_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{n-m}} \\
&\le \sum_{n=0}^{m-1}\frac{m^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} < \infty
\end{aligned}
$$

ii. 定义复数 z 的正余弦函数：

$$
\cos(z)=\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \sin(z)=\frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}
$$

利用 i 中的定义, 可得：

$$
\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{1}{2}e^{iz}+\frac{1}{2}e^{-iz} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}+\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}-\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \\
&= 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots
\end{aligned}
$$

同理可得:

$$
\begin{aligned}
\sin(z) &= \frac{1}{2i}e^{iz} - \frac{1}{2i}e^{-iz} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \frac{i}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \frac{i}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots .
\end{aligned}
$$

可以发现与 $\mathbb{R}$ 上的 Taylor 级数一致。

iii. 利用 (d)ii 中的定义，$\forall z \in \mathbb{C}$，

$$\cos(z) + i\sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} + i\frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = e^{iz}.$$

特别的，取 $z = \theta \in \mathbb{R}$ ，有 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ，该式对 $\forall\theta \in \mathbb{R}$ 成立。

iv. 对于复数形如 $z = a + ib$, 可得幅角 $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

由 (d)iii 知：$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

由 (c) 知：$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

故 $|z|e^{i\theta} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = a + ib = z$

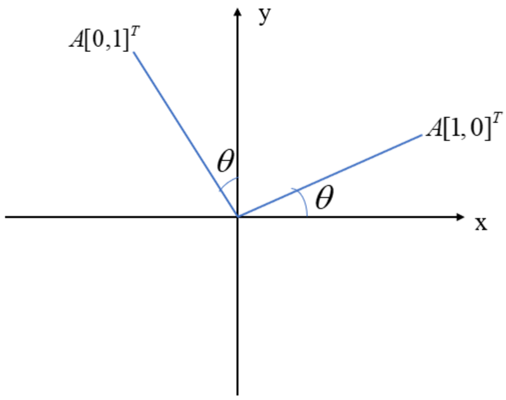
(e) i. 若 $z = e^{i\theta}, w = |w|e^{i\phi}$, 则

$$zw = |w|e^{i(\theta+\phi)} = |w|\left[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\right]$$

易知，$|zw| = |w|$，相乘后长度不变；由 (d)iv 知，相乘后角度旋转了 θ 度

故复数乘积 zw 相当于对 w 逆时针旋转 θ 度

$$
\begin{aligned}
zw = |w|e^{i(\theta+\phi)} = |w|\begin{bmatrix}\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}|w|\begin{bmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi\end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}w，\text{此时}A = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$



对于单位基向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，经过旋转后，

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

显然旋转后的向量长度仍为 1 , 长度不变

且 $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = 0$，仍保持相互垂直

故为一组单位基向量。

ii. 若 z 是实数满足 $z = |z| > 0$, 若写成极坐标的形式 $z = |z|e^{i\theta}$

可得 $e^{i\theta} = 1$, 此时 $\cos\theta = 1, \sin\theta = 0$, 带入得 $e^{i\theta}$ 对应的旋转矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$zw = |z|e^{i\theta}w = |z|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}w = \begin{bmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{bmatrix}w$

说明此时 $A = \begin{bmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{bmatrix} = |z|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 保证了不旋转, 即方向不变, $|z|$ 代表长度拉伸了 $|z|$ 倍。

iii. 结合上一问的启发, 对于一般复数 $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$,

由 i. 知, $e^{i\theta}$ 对应的旋转矩阵为 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$zw = |z|e^{i\theta}w = |z|\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}w = \begin{bmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}w$$

$$= S \cdot R \cdot w$$

其中 $S = \begin{bmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{bmatrix}$， $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, 此时 $A = RS$.

2. (a)

$$s_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma(k)e^{-i\omega k}$$

已知 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声过程（iid 序列），故当 $k \neq 0$ 时，$\gamma(k) = 0$

$$\therefore s_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma(0) = \frac{1}{2\pi}$$

(b)

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} = (1+\theta\mathscr{L})\varepsilon_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$$

给定滤波多项式 $C(z) = B(z) = 1 + \theta z$，按照第五讲滤波序列的谱表示，增益函数 $G(\omega) = \sqrt{C(e^{-i\omega})C(e^{i\omega})} = \sqrt{(1+\theta e^{-i\omega})(1+\theta e^{i\omega})}$

$$\therefore s_X(\omega) = G^2(\omega)s_\epsilon(\omega) = \frac{(1+\theta e^{-i\omega})(1+\theta e^{i\omega})}{2\pi} = \frac{1+2\theta\cos\omega+\theta^2}{2\pi}$$

当 θ 由 0 增大到 1 时，谱密度函数在 $[0, 1/2]$ 上每处的取值增加。

(c) 给定 AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$，即 $(1-\phi\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t$，可写为 $A(\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t$

$$\therefore X_t = A(\mathscr{L})^{-1}\varepsilon_t$$

给定滤波多项式 $C(z) = A(z)^{-1} = \frac{1}{1-\phi z}$，增益函数 $G(\omega) = \sqrt{C(e^{-i\omega})C(e^{i\omega})}$

$$\therefore s_X(\omega) = G^2(\omega)s_\epsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi(1-\phi e^{-i\omega})(1-\phi e^{i\omega})} = \frac{1}{2\pi(1-2\phi\cos\omega+\phi^2)}$$

令 $f(\phi) = 1 - 2\phi\cos\omega + \phi^2$，则 $f'(\phi) = 2\phi - 2\cos\omega$

故当 $\phi \leq \cos\omega$ 时，$f'(\phi) \leq 0$，$f(\phi)$ 单调递减，$s_X(\phi)$ 单调递增；当 $\phi > \cos\omega$ 时，$f'(\phi) > 0$，$f(\phi)$ 单调递增，$s_X(\phi)$ 单调递减

所以当 ϕ 由 0 增大到接近 1 时，若 $\phi \leq \cos\omega$，谱密度函数 $s_X(\omega)$ 在每处的取值增加；若 $\phi > \cos\omega$，谱密度函数 $s_X(\omega)$ 在每处的取值减少。