2022 秋季本科时间序列

第 2 次作业答案

9 月 23 日

1. (a) 将 $f(ax+y,ax+y)$ 按照函数性质展开：

$$\begin{aligned} f(ax+y,ax+y) &= f(ax,ax)+f(ax,y)+f(y,ax)+f(y,y) \\ &= a^2 f(x,x)+2af(x,y)+f(y,y) \geq 0 \end{aligned}$$

将其视作 a 的函数，根据二次函数性质：$\Delta = [2f(x,y)]^2 - 4f(x,x)f(y,y) \leq 0$

即 $|f(x,y)|^2 \leq f(x,x) \times f(y,y)$，原式得证。

(b) 证明 $cov(,)$ 满足对称双线性函数的性质：

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(x,y) &= \mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) \\ &= \mathrm{cov}(y,x) \\ \mathrm{cov}(ax,y) &= \mathbb{E}[(ax)y] - \mathbb{E}(ax)\mathbb{E}(y) \\ &= a\mathbb{E}(xy) - a\mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) \\ &= a\mathrm{cov}(x,y) \\ \mathrm{cov}(x+y,z) &= \mathbb{E}[(x+y)z] - \mathbb{E}(x+y)\mathbb{E}(z) \\ &= [\mathbb{E}(xz) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(z)] + [\mathbb{E}(yz) - \mathbb{E}(y)\mathbb{E}(z)] \\ &= \mathrm{cov}(x,z) + \mathrm{cov}(y,z) \end{aligned}$$

证明 ρ 的取值在 [-1,1] 之间：

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(aX+Y) = \mathrm{cov}(aX+Y,aX+Y) = a^2\mathrm{cov}(X,X) + 2a\mathrm{cov}(X,Y) + cov(Y.Y) \geq 0 \\ \Delta = 4\mathrm{cov}(X,Y)^2 - 4\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) \leq 0 \\ |\mathrm{cov}(X,Y)| \leq \sigma_X\sigma_Y \\ \text{即}\rho = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \in [-1,1] \end{aligned}$$

(c)

$$\text{要证明：} |\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq ||\boldsymbol{x}|| \times ||\boldsymbol{y}||$$

$$\text{即证明：} |x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

$$f(ax+y, ax+y) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + y_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a^2 x_i^2 + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$$

$$\Delta = 4(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq 0$$

$$\therefore (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

$$\text{即}|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}\text{，原不等式得证。}$$

(d)

$$(||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||)^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} + 2|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|$$

$$(||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||)^2 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} + 2||\boldsymbol{x}|| \times ||\boldsymbol{y}||$$

$$\text{由 (c) 知，} |\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq ||\boldsymbol{x}|| \times ||\boldsymbol{y}||$$

$$\therefore (||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||)^2 \leq (||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||)^2\text{，即}||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$$

2.

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + \ldots + a_{1n}x_{n1} & \cdots & a_{11}x_{1k} + \ldots + a_{1n}x_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_{11} + \ldots + a_{mn}x_{n1} & \cdots & a_{m1}x_{1k} + \ldots + a_{mn}x_{nk} \end{pmatrix}_{m\times k}$$

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{AX}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(a_{11}x_{11} + \ldots + a_{1n}x_{n1}) & \cdots & \mathbb{E}(a_{11}x_{1k} + \ldots + a_{1n}x_{nk}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}(a_{m1}x_{11} + \ldots + a_{mn}x_{n1}) & \cdots & \mathbb{E}(a_{m1}x_{1k} + \ldots + a_{mn}x_{nk}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\mathbb{E}(x_{11}) + \ldots + a_{1n}\mathbb{E}(x_{n1}) & \cdots & a_{11}\mathbb{E}(x_{1k}) + \ldots + a_{1n}\mathbb{E}(x_{nk}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbb{E}(x_{11}) + \ldots + a_{mn}\mathbb{E}(x_{n1}) & \cdots & a_{m1}\mathbb{E}(x_{1k}) + \ldots + a_{mn}\mathbb{E}(x_{nk}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{E}(x_{11}) & \cdots & \mathbb{E}(x_{1k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}(x_{n1}) & \cdots & \mathbb{E}(x_{nk}) \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$$

3. (a) 满秩 $\Rightarrow$ 线性无关：（反证）

若 $X_1,...,X_n$ 线性相关，则存在 $a_1,...,a_n$ 不全为 0，使得 $a_1X_1+\cdots+a_nX_n=c$

对 $i=1,2,...,n$，有 $\text{cov}(a_1X_1+a_2X_2+\cdots a_nX_n,X_i)=0$，

即 $a_1\text{cov}(X_1,X_i)+a_2\text{cov}(X_2,X_i)+\cdots+a_n\text{cov}(X_n,X_i)=0$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\text{cov}(X_1,X_1) & \cdots & \text{cov}(X_1,X_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \text{cov}(X_n,X_1) & \cdots & \text{cov}(X_1,X_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}$$

则 $a_1r_1+a_2r_2+\cdots+a_nr_n=0$，行向量线性相关，$\boldsymbol{\Sigma}$ 非满秩，原命题得证。

线性无关 $\Rightarrow$ 满秩：（反证）

若 $\boldsymbol{\Sigma}$ 非满秩，则存在 $a_1,...,a_n$ 不全为 0，使得 $a_1r_1+a_2r_2+\cdots+a_nr_n=0$

$$a_1\text{cov}(X_1,X_i)+a_2\text{cov}(X_2,X_i)+\cdots+a_n\text{cov}(X_n,X_i)=\text{cov}(a_1X_1+a_2X_2+\cdots a_nX_n,X_i)=0$$

故 $a_1X_1+\cdots+a_nX_n=c$，$X_1,...,X_n$ 线性相关，原命题得证。

(b) 记 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,...,X_n)^{\mathrm{T}}$，其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Sigma}=cov(\boldsymbol{X_i},\boldsymbol{X_j})=\begin{pmatrix}\text{cov}(X_1,X_1) & \cdots & \text{cov}(X_1,X_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \text{cov}(X_n,X_1) & \cdots & \text{cov}(X_1,X_n)\end{pmatrix}=\mathbb{E}\left[[\boldsymbol{X_i}-\mathbb{E}(\boldsymbol{X_i})][\boldsymbol{X_j}-\mathbb{E}(\boldsymbol{X_j})]^{\mathrm{T}}\right]$$

显然 $cov(\boldsymbol{X_i},\boldsymbol{X_j})=cov(\boldsymbol{X_j},\boldsymbol{X_i})^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为对称矩阵。

(c) 由 (b) 知，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为对称矩阵。设 $\boldsymbol{a}$ 为任意与 $\boldsymbol{X}$ 有相同维数的常数向量，则

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbb{E}\left[[\boldsymbol{X}-\mathbb{E}(\boldsymbol{X})][\boldsymbol{X}-\mathbb{E}(\boldsymbol{X})]^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{a}=\mathbb{E}\left[\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{X}-\mathbb{E}(\boldsymbol{X})]\right]^2\geq 0$$

故 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为非负定矩阵。

由 (a) 知，当 $X_1,...,X_n$ 线性无关时，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为满秩矩阵，故 $|\boldsymbol{\Sigma}|\neq 0$。

所以若 $X_1,...,X_n$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定矩阵。

(d) 当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定矩阵时，$|\boldsymbol{\Sigma}|>0$，$\boldsymbol{\Sigma}$ 可逆，故 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 存在。

因为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 均为正。

$\therefore(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{T})^{-1}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{T}=diag(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n})$ 且 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$ 均为正，故 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 也为正定矩阵。

4. 使用一阶矩和二阶矩对参数进行估计：

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} = \mathbb{E}(X_i)^2 + \mathrm{var}(X_i) = \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\text{整理得：}\begin{cases} a+b = \dfrac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \\ ab = \dfrac{4}{n^2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - \dfrac{3}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

联立可解得 a,b 的估计值。

5. 已知随机变量 x,y 服从二元正态分布，记 $\boldsymbol{z} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，其中

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_y\rho \\ \sigma_x\sigma_y\rho & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

ρ 为 x_1 和 x_2 的相关系数，$|\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)$，当 $|\rho| < 1$ 时，$|\boldsymbol{\Sigma}| \neq 0$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_x\sigma_y\rho \\ -\sigma_x\sigma_y\rho & \sigma_x^2 \end{pmatrix}$$

由 $f(\boldsymbol{z}) = (2\pi)^{-1}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} exp[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})]$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

可以求得 x 和 y 的边缘密度为

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right]$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

当 $\mathrm{cov}(x,y) = 0$ 即 $\rho = 0$ 时，

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

此时有 $f(x,y) = f_x(x)f_y(y)$，即 x 和 y 相互独立

故对服从二元正态分布的随机变量 x 和 y，x 和 y 相互独立与 $\mathrm{cov}(x,y) = 0$ 等价。