

2022 秋季本科时间序列

第 9 次作业

提交日期：12 月 19 日

1. 考虑 2-元变量 VAR(1) 过程 $\mathbf{X}_t = \mathbf{c} + \Phi \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$, 其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为向量白噪声,

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Ω 为 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的协方差矩阵。

- (a) 请验证 \mathbf{X}_t 的平稳性, 并计算期望 $E\mathbf{X}_t$ 。
(b) 请计算 \mathbf{X}_t 的 MA(∞) 展开, 再进一步计算协方差矩阵 $\text{var}(\mathbf{X}_t)$ 。提示: 请先计算 Φ 的特征值分解 $\Lambda \Lambda^{-1}$ 及 Φ^i 表达式。
(c) 请计算 Ω 的 Cholesky 分解 $\Omega = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$, 任选一项计算 \mathbf{X}_{t+s} 关于正交化后的冲击 $\mathbf{u}_t = [u_{1t}, u_{2t}]^T = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的脉冲响应函数:

$$\frac{\partial X_{1t+s}}{\partial u_{1t}}, \quad \frac{\partial X_{1t+s}}{\partial u_{2t}}, \quad \frac{\partial X_{2t+s}}{\partial u_{1t}}, \quad \frac{\partial X_{2t+s}}{\partial u_{2t}}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

2. 将 AR(2) 过程 $X_t = 1.1X_{t-1} - 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$ 写为

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ X_t \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

的形式, 并说明对任意的 $s \geq 2$, 最优线性预测 (向量) 具有如下递归形式:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{t+s|t} \\ \hat{X}_{t+s-1|t} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \hat{X}_{t+s-1|t} \\ \hat{X}_{t+s-2|t} \end{bmatrix},$$

从而利用 \mathbf{A} 的特征值分解, 对任意 $s \geq 1$, 计算 $\hat{X}_{t+s|t}$ 的通项表达式, 并计算 $\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{X}_{t+s|t}$ 。

3. 考虑 MA(1) 过程 $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} + \psi\varepsilon_{t-2}$, 其中 $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ 。计算最优线性预测 $\hat{X}_{t+s|t}$ 的表达式, $s \geq 1$ 。提示: t 期信息集为 $\{X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$, 但真正对预测 X_{t+s} 有用的变量个数有限, 对不同的 s 取值, 首先确定信息集中哪些 X_{t-i} 对预测有用。