2022 秋季本科时间序列

第 7 次作业

提交日期：11 月 14 日

注意：如果完成过程遇到障碍，可以参考去年作业 6 答案。

1. 考虑一般的线性回归模型

$$\boldsymbol{Y}_{T\times 1} = \boldsymbol{X}_{T\times K}\boldsymbol{\beta}_{K\times 1} + \boldsymbol{e}_{T\times 1},$$

其中 K 个解释变量 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{Z}_{T\times N}, \boldsymbol{W}_{T\times M}]$ 可以分为两组 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{W}$，满足 $N + M = K$；同时 $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\delta}^\intercal, \boldsymbol{\theta}^\intercal]^\intercal$ 也可以分为对应的两组。故回归模型可以等价的表示为：

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}. \tag{1}$$

(a) 定义矩阵 $\boldsymbol{P_X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal$。请验证 $\boldsymbol{P_X}$ 满足如下两条性质：

i. 对于任意一个 $\boldsymbol{X}$ 的列向量线性组合构成的向量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，$\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}$。

ii. 对 $\mathbb{R}^T$ 中任意向量 $\boldsymbol{\zeta}$，$\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_X})\boldsymbol{\zeta}$ 与 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$ 相互垂直，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，即前者转置与后者乘积为 0。

这样的矩阵 $\boldsymbol{P_X}$ 称为关于 $\boldsymbol{X}$ （列线性空间）的投影矩阵。

(b) 令 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\hat{\boldsymbol{\delta}}^\intercal, \hat{\boldsymbol{\theta}}^\intercal\right]^\intercal$ 为回归模型 (1) 系数的 OLS 估计，$\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$。与 (a) 类似地定义 $\boldsymbol{P_W}$。令

$$\tilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W})\boldsymbol{Y}, \qquad \tilde{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W})\boldsymbol{Z}.$$

请证明下述结论：

i. $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 分别为 $\boldsymbol{Y}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 对 $\boldsymbol{W}$ 回归的残差向量；

ii. $\hat{\boldsymbol{e}}$ 垂直于 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{W}$，即 $\boldsymbol{Z}^\intercal\hat{\boldsymbol{e}}$ 与 $\boldsymbol{W}^\intercal\hat{\boldsymbol{e}}$ 均为 $\boldsymbol{0}$ 向量；

iii. $\hat{\boldsymbol{e}}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 上的投影为 $\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{P_W}\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{0}$；

iv. 考虑 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 对 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 的回归 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}$ 为残差项，请说明这个回归的 OLS 估计系数正好等于 (1) 中 OLS 估计的结果 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$。提示：在 (1) 的 OLS 估计式 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{e}}$ 两边同乘 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W}$，进而验证 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ 满足 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$ 回归系数 OLS 估计的条件。

至此，你已经证明了著名的 Frisch-Waugh-Lovell 定理。

(c) 作为 FWL 定理的应用，请证明：在包含常数项的回归模型 $Y_t = \alpha + \boldsymbol{X}_t^\intercal\boldsymbol{\beta} + e_t$, $t = 1, \ldots, T$ 中，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 等价于对所有变量去除均值后的回归估计值，即 $\tilde{Y}_t = \tilde{\boldsymbol{X}}_t^\intercal\boldsymbol{\beta} + u_t$，其中 $\tilde{Y}_t = Y_t - \bar{Y}$，$\bar{Y}$ 为 Y_t 样本均值，$\tilde{\boldsymbol{X}}$ 定义类似。

2. 沿用上题设置，回答下列问题。

(a) 请证明 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 回归的拟合值 $\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{P_X}\boldsymbol{Y}$；类似的，请说明 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{Z}$ 回归的拟合值 $\bar{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{P_Z}\boldsymbol{Y}$。

(b) 利用上题结论，请证明 $\hat{\boldsymbol{Y}}-\bar{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 垂直，从而与 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 垂直。注释：这一性质的几何直观就是著名的三垂线定理，你可以画一个草图，$\boldsymbol{Y}$ 为平面外一个向量，$\boldsymbol{Z}$ 为平面上一个向量且与 $\boldsymbol{Y}$ 起点相同，此时仔细观察 $\boldsymbol{Y}$ 向平面的投影即 $\boldsymbol{P_X Y}$，以及向 $\boldsymbol{Z}$ 所在直线的投影 $\boldsymbol{P_Z Y}$，则易看出两条投影线段和两者的差，构成直角三角形，即 $\hat{\boldsymbol{Y}}-\bar{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 垂直。

(c) 利用上问，证明 $\hat{\boldsymbol{Y}}^\intercal\hat{\boldsymbol{Y}} \geq \bar{\boldsymbol{Y}}^\intercal\bar{\boldsymbol{Y}}$，并且该不等号严格成立的充分必要条件为 $\hat{\boldsymbol{Y}}-\bar{\boldsymbol{Y}} \neq \boldsymbol{0}$。

(d) 利用上问，证明：在 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{X}=[X_1,\ldots,X_n]$ 回归中增加解释变量 X_{n+1} 时，R^2 单调递增。