2022 秋季本科时间序列

第 5 次作业

提交日期：10 月 24 日

1. 假设 $\{X_t\}$ 满足 $(1-\phi\mathscr{L})X_t = Y_t$，$|\phi|<1$，$\{Y\}$ 为平稳过程，自协方差函数为 γ_k。请计算 $\{X_t\}$ 的自协方差函数 η_k 表达式，并说明 $|\eta_k|<\infty$，即 $\{X_t\}$ 平稳。注：证明需要使用 γ_k 存在一致上界的性质；以往作业中讨论过这个上界。

2. 假设 AR(p) 过程 $(1-\phi_1\mathscr{L}-\cdots-\phi_p\mathscr{L}^p)X_t = \varepsilon_t$ 的特征多项式 p 个零点 $z_1,\ldots,z_p$ 模长均大于 1。请写出 X_t 的 MA(∞) 表达式 $X_t = (1-\mathscr{L}/z_1)^{-1}\cdots(1-\mathscr{L}/z_p)^{-1}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}$ 前三项系数 a_0, a_1, a_2 关于 $z_1\ldots,z_p$ 的表达式，并进一步确定 a_1 与系数 $\phi_1,\ldots,\phi_p$ 之间的关系。

3. 请确定课件 6 第 18 页系数矩阵 $\mathbf{\Phi}$ 的可逆性与 AR(2) 过程平稳性之间的关联。特别的，请计算使得 AR(2) 过程平稳的系数 $[\phi_1,\phi_2]^\intercal \in \mathbb{R}^2$ 的取值范围。注：特征多项式的零点可以是复数，不要只考虑实数的情况。

4. 对 AR(2) 过程 $X_t = 0.9X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t$，$\sigma_\varepsilon^2 > 0$，计算其自协方差函数 γ_k 的递推表达式。

5. 对 AR(2) 过程 $(1-\phi\mathscr{L})^2 X_t = \varepsilon_t$，$|\phi|<1$，尝试计算其自协方差函数 γ_k 的递推表达式。注：请确定此时能否用特征值分解计算系数矩阵的幂次；若否，请用归纳法计算矩阵的幂次表达式。

6. 仿照 AR 过程的推导，请给出一般的 ARMA(2,1) 过程 $X_t = \phi_1X_{t-1}+\phi_2X_{t-2}+\varepsilon_t+\theta\varepsilon_t$ 的自协方差函数 $\gamma(k)$ 求解方法，并计算当 $\phi_1 = 0.9, \phi_2 = -0.2, \theta = 0.5, \sigma_\varepsilon^2 = 1$ 时，γ_k 的递推表达式。

7. 假设 $X_t = U + \varepsilon_t$，其中 ε_t 为 iid 序列，方差为 $\sigma_\varepsilon^2 > 0$，U 与 $\{\varepsilon_t\}$ 独立，方差为 $\sigma_U^2 > 0$。令 $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t^2$，请计算 $\mathbb{E}\hat{\sigma}_X^2$，并求 $\lim_{t\to\infty}\hat{\sigma}_X^2$。

8. 利用 R 或 Python，完成下列随机模拟，验证大数定律与中心极限定理。考虑 4 个分布 $F_i, i=1,\ldots,4$：(i) 两点分布 $\Pr(0)=\Pr(1)=0.5$；(ii) 均匀分布 $U([0,1])$；(iii) 标准正态分布；(iv) 中心为 0 的 Cauchy 分布。对每个分布，生成 NK 次 iid 抽样序列 $\{X_t\}_{t=1}^{NK}$。对每组抽样，完成下列计算与绘图。

   (a) 固定 $N=100, K=100$，对 $k=1,\ldots,K$，计算累计样本均值序列 $\hat{\mu}_k = \frac{1}{Nk}\sum_{t=1}^{Nk} X_t$，绘制 $\hat{\mu}_k$ 序列图，并标出 $\mathbb{E}X_t$ 取值水平线，从而直观讨论大数定律渐进性与样本量之间的关系。

(b) 固定 $N = 100, K = 500$，对 $k = 1, \dots, K$，计算分组样本均值 $\hat{\mu}_k = \frac{1}{N}\sum_{t=N(k-1)+1}^{Nk} X_t$，并计算标准化序列 $\zeta_k = (\hat{\mu}_k - \hat{\mu})/\hat{\sigma}_\mu$，其中 $\hat{\mu} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\hat{\mu}_k$，$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{k}(\hat{\mu}_k - \hat{\mu})^2$。绘制 $\{\zeta_k\}$ 的直方图，并附加标准正态分布的密度函数线，比较 $\{\zeta_k\}$ 的样本分布是否接近后者。

(c) 改变 $N = 500$，重复上问，并说明此时 $\{\zeta_k\}$ 的样本分布是否更接近标准正态分布。

(d) 若上两问中，对某些分布 F_i，存在中心极限定理不适用情况，请说明可能的原因。