2022 秋季本科时间序列

# 第 4 次作业

提交日期：10 月 10 日

1. 关于复数的一系列性质，可以自行查阅资料学习。以下为通用记号：将复数记为 $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 为虚根，满足 $\mathrm{i}^2 = -1$。

   (a) 固定任一非零复数 $z = a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 不全为零，另选任意复数 $w = c+d\mathrm{i} \in \mathbb{C}$，其中 $c, d \in \mathbb{R}$，并将 $z, w$ 均视作复平面 $\mathbb{C}$ 上的 2-维向量 $z = [a, b]^\intercal, w = [c, d]^\intercal$。请验证复数乘积 $zw$ 可视作对 $w$ 进行线性变换：$w \mapsto Aw \in \mathbb{C}$，其中 $2 \times 2$ 实数矩阵 $A$ 由 $z$ 唯一决定；为此，请写出 $A$ 的表达式，从而验证复数乘积运算 $zw$ 满足线性变化的所有定义性质。

   (b) 定义复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 的模长为 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$，亦即复数作为 2-维向量的模长。利用作业 3 证明的向量版 Cauchy-Schwartz 不等式，请证明复数模长的三角不等式：

   $$|z + w| \le |z| + |w|, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

   (c) 定义复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 的（复）共轭 $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$。请证明 $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$，并请用归纳法证明 $\overline{z^n} = \bar{z}^n \ \forall n \in \mathbb{N}$，从而证明 $|z^n| = |z|^n \ \forall n \in \mathbb{N}$。

   (d) 在复平面 $\mathbb{C}$ 上对任意复数 $z$ 定义指数函数为：

   $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

   其中阶乘 $n! = 1 \times \cdots \times n \ \forall n \ge 1$，并补充定义 $0! = 1$。

      i.【5 分选做题，即本次作业总分 105】请证明，对于任意 $z \in \mathbb{C}$，$|e^z| < \infty$，即 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 是一个收敛级数。提示：查阅任一复变函数教材；或者注意到以下事实，从而使用复数的 Cauchy 收敛准则证明之：任选大于等于 $|z|$ 的正整数 $m$，则当 $n \ge m$ 时有 $\frac{m^n}{n!} \le \frac{m^m}{m!}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n-m}$。

      ii. 进一步定义复数 $z$ 的余弦和正弦函数为：

      $$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

      请证明如下级数展开式：

      $$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots,$$

      $$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

      并说明上述级数展开式与定义在实数轴 $\mathbb{R}$ 上的 $\cos, \sin$ 函数 Taylor 级数一致。

iii. 请证明 $e^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$；特别的，$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\ \forall \theta \in \mathbb{R}$。

iv. 对于任意复数 $z = a + b\mathrm{i}$，令 $\theta$ 为向量 $z$ 在 2-维平面 $\mathbb{C}$ 上与实部正半轴（即常规的 $x$-正半轴）的逆时针夹角，称为幅角。利用 iii，请证明 $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$；此表达式称为复数的极坐标形式。

(e) 再次考虑 (a) 中线性变换 $A$。

i. 若 $z = e^{\mathrm{i}\theta}$，其中 $\theta \in \mathbb{R}$ 表示 $z$ 的幅角。类似的，对任意 $w \in \mathbb{C}$，记其极坐标形式为 $w = |w|e^{\mathrm{i}\phi}$。请说明此时复数乘积 $zw$ 相当于对 $w$ 逆时针旋转 $\theta$ 角度。写出此时矩阵 $A$ 的表达式，并绘图示意 $A[1,0]^\intercal, A[0,1]^\intercal$ 的位置，即在 $A$ 作用下，复平面的一组单位基如何变化。进一步说明，单位基向量变换后 $A[1,0]^\intercal, A[0,1]^\intercal$，长度不变且相互垂直，故依然为一组单位基向量。

ii. 若 $z = |z| > 0$ 为一实数，请写出此时线性变换矩阵 $A$，并说明此时线性变换保持向量方向不变但长度拉升 $|z|$。

iii. 对于一般的非零复数 $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$，请说明对应的线性变换矩阵 $A$ 可写为一个表示旋转的矩阵 $R$ 与一个表示拉升的矩阵 $S$ 的乘积。

2. 结合习题 1，自行学习课件 5 pp.24–28 关于线性滤波与增益函数的内容。给定白噪声过程 $\{\varepsilon_t\}$，计算下列过程的谱密度函数。

(a) 请计算 $\varepsilon_t$ 自身的谱密度函数 $s_\varepsilon(\omega)$。

(b) 给定 MA(1) 过程 $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} = (1 + \theta\mathscr{L})\varepsilon_t$，其中 $\theta \in \mathbb{R}$。请计算 $X_t$ 的谱密度函数 $s_X(\omega)$，并讨论 $\theta$ 由 0 增大到 1 时，谱密度函数在 $[0, 1/2]$ 如何变化。

(c) 给定 AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$，或等价的 $(1 - \phi\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t$，其中 $|\phi| < 1$。请计算 $X_t$ 的谱密度函数 $s_X(\omega)$，并讨论 $\phi$ 由 0 增大到接近 1 时，谱密度函数在 $[0, 1/2]$ 如何变化。