2022 秋季本科时间序列

第 3 次作业

提交日期：9 月 26 日

1. 假设 $\{X_t\}$ 为 iid 序列，期望为 μ 方差为 σ^2。样本方差估计量定义为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \hat{\mu})^2$，$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$ 为样本均值。
   (a) 请证明 $\mathbb{E}\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$，即 $\hat{\sigma}^2$ 为总体方差的无偏估计量。
   (b) 请证明 $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$，即 $\hat{\sigma}^2$ 为总体方差的一致估计量。
2. 考虑两组样本 $\{X_t\}_{t=1}^{T}, \{Y\}_{t=1}^{T}$，请利用作业 2 向量内积版的 Cauchy-Schwartz 不等式，证明样本相关系数 $|\hat{\rho}_{XY}| \le 1$。注意，协方差与方差的计算，应该除以同样的样本量 T 或 $T-1$。
3. 考虑一个样本数为 3 的时间序列 $\{X_t\}_{t=1}^{3}$，且样本均值 $\frac{1}{3}\sum_{t=1}^{3} X_t = 0$。请写出样本 1 阶自相关系数 $\hat{\rho}(1)$ 的表达式，并尝试自行寻找具体数值，说明 $\hat{\rho}(1)$ 的取值范围是否超过 $[-1, 1]$。
4. 给定 $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$，进一步给定递推公式 $X_t = \mu + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$，其中 $X_0 = 0$ 为给定初始值，$\mu, \rho \in \mathbb{R}$ 为参数。
   (a) 对任意 t，请计算确定 X_t 的分布 F_t 及其期望与方差。
   (b) 当 $|\rho| < 1$ 时，请确定 $t \to \infty$ 时 X_t 分布是否会收敛到一个极限分布 F_∞，并说明理由。
   (c) 当 $\rho = \pm 1$ 时，X_t 的分布是否收敛，并说明理由。$\rho = \pm 1$ 时，X_t 的分布变化有何差异？
   (d) 当 $|\rho| > 1$ 时，X_t 的分布是否收敛，并说明理由。