2022 秋季本科时间序列

第 2 次作业

提交日期：9 月 19 日

1. 令 $\mathcal{X}$ 为一个任意的线性空间，即 $\forall x, y \in \mathcal{X}$ 以及 $a, b \in \mathbb{R}$，$ax + by \in \mathcal{X}$ 有定义且仍为 $\mathcal{X}$ 中的一个元素。定义函数 $f : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，即对于任意 $x, y \in \mathcal{X}$，$f(x, y)$ 为一个实数。
   (a) 假设 f 为一个对称双线性函数，即 $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ 及 $a \in \mathbb{R}$，f 满足：(i) $f(x, y) = f(y, x)$；(ii) $f(ax, y) = af(x, y)$；(iii) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$。请证明：若 $f(x, x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{X}$，则有如下 Cauchy-Schwatz 不等式
   $$|f(x, y)|^2 \leq f(x, x) \times f(y, y).$$
   提示：对任意 $a \in \mathbb{R}$，考虑 $f(ax + y, ax + y)$ 的展开并看做 a 的函数，进而利用 $f(x, x) \geq 0$ 的性质。
   (b) 利用 (a)，证明随机变量 X, Y 的相关系数 ρ 取值在 $[-1, 1]$ 之间。提示：将 cov 看做一个对称双线性函数，并说明其满足 (a) 中相关性质。
   (c) 定义 n-维向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 的内积为 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$，并定义 $\boldsymbol{x}$ 的模长 $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$。利用 (a)，证明向量版本的 Cauchy-Schwartz 不等式
   $$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq ||\boldsymbol{x}|| \times ||\boldsymbol{y}||.$$
   (d) 利用 (c) 证明 n-维线性空间向量模长的三角不等式：对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，
   $$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||.$$
2. 假设 $\boldsymbol{X} = [X_{ij}]$ 是一个 $n \times k$ 的矩阵，每个元素 X_{ij} 都是一个随机变量。定义 $\mathbb{E}\boldsymbol{X} = [\mathbb{E}X_{ij}]$，即每个元素取期望。令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为一个 $m \times n$ 的常数矩阵，请证明 $\mathbb{E}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\mathbb{E}\boldsymbol{X}$。
3. 给定 n 个随机变量 $X_1, \ldots, X_n$，若不存在非零数组 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n = c$，其中 $c \in \mathbb{R}$ 为一常数，则称 $X_1, \ldots, X_n$ 线性无关；否则，称其线性相关。以 $\boldsymbol{\Sigma} = [\mathrm{cov}(X_i, X_j)]$ 记 $X_1, \ldots, X_n$ 的协方差矩阵。
   (a) 请证明，$X_1, \ldots, X_n$ 线性无关，当且仅当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为满秩矩阵。
   (b) 请证明，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为对称矩阵。
   (c) 请证明，若 $X_1, \ldots, X_n$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定矩阵。
   (d) 利用对称矩阵的特征值分解，证明当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定矩阵时，$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 存在且同为正定矩阵。
4. 假设总体分布为 $U([a, b])$，其中 $a < b$ 为两个实数；$X_1, \ldots, X_n$ 为该总体下的 n 个样本，$n \geq 3$。请设计一个矩估计的方法，用 $X_1, \ldots, X_n$ 的样本矩，来估计 a, b 两个参数。
5. 假设 X, Y 服从二元正态分布，利用其密度函数证明 X, Y 独立当前仅当 $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$。