

2022 秋季本科时间序列

第 1 次作业

提交日期：9 月 12 日

1. 请解答课件 2 第 8、14、17 页的练习。
2. 对 Poisson 分布, 请证明 $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1$ 。
3. 对二项分布 $\mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, 令 $\lambda = np$ 为正常数。请计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = i)$, 从而说明当 n 充分大而 p 较小时, 二项分布的概率可由 Poisson 分布近似。
4. 给定 $\mathbb{R}$ 上的一个函数 $g(\cdot)$, 若对任意的 $x < y$ 以及 $\alpha \in (0, 1)$, 均有 $g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)$, 则称 g 为凸函数; 若前式不等号为严格小于号, 则称 g 为严格凸函数。
给定取值为 $\mathbb{R}$ 的随机变量 X , 以及一个凸函数 $g(\cdot)$, 请证明 $\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$, 且若 $g(\cdot)$ 严格凸, 则 $\mathbb{E}[g(X)] > g(\mathbb{E}[X])$ 。此结论即 Jensen 不等式。
提示: 借助凸函数的几何性质, 首先说明可以找到一个常数 k , 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $g(x) \geq g(\mathbb{E}[X]) + k(x - \mathbb{E}[X])$ 。
5. 利用 4, 证明 $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2$